UNIVERSIDADE MUNICIPAL DE SÃO CAETANO DO SUL
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL

Ricardo da Silva Sampaio

A ÁLGEBRA E O DESENVOLVIMENTO DE UMA ATITUDE INVESTIGATIVA: A CONSTRUÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE ENSINO

São Caetano do Sul
2019

RICARDO DA SILVA SAMPAIO

A ÁLGEBRA E O DESENVOLVIMENTO DE UMA ATITUDE INVESTIGATIVA: A CONSTRUÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE ENSINO

Trabalho Final de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação – Mestrado Profissional – da Universidade Municipal de São Caetano do Sul para a obtenção do título de Mestre em Educação.

Área de concentração: Formação de Professores e Gestores

Orientadora: Profa. Dra. Maria de Fátima Ramos de Andrade

São Caetano do Sul
2019

FICHA CATALOGRÁFICA

Sampaio, Ricardo da Silva
A Álgebra e o desenvolvimento de uma atitude investigativa: a construção de estratégia de ensino / Ricardo da Silva Sampaio. – 2019.
143 p. : il.

Orientadora: Profa. Dra. Maria de Fátima Ramos de Andrade
Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Municipal de São Caetano do Sul - USCS, São Caetano do Sul, 2019.

1. Matemática. 2. Desenvolvimento do Pensamento Científico. 3. Ensino da álgebra. 4. Formação de Professores. 5. Sequência Didática. I. Andrade, Maria de Fátima Ramos de. II. Título.

Trabalho Final de Curso defendido e aprovado em 14/02/2019 pela Banca Examinadora constituída pelos(as) professores(as):

Profa. Dra. Maria de Fátima Ramos de Andrade (orientadora)

Profa. Dra. Ana Sílvia Moço Aparício (USCS)

Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti (UFOP)

Dedico este trabalho a todos os meus alunos(as) e ex-alunos(as), principalmente aqueles(as) que me auxiliaram na pesquisa, pois sem eles a conclusão desta não seria possível.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por ter me dado saúde e capacidade para a conclusão deste trabalho.

Agradeço a meus familiares e todos àqueles que direta ou indiretamente apoiaram minhas decisões.

Agradeço aos meus colegas de turma em especial a Cristina, Bárbara e André que sempre estiveram prontos a motivar nos momentos difíceis.

Agradeço a minha orientadora, Profa. Dra. Maria de Fátima Ramos de Andrade, por toda a paciência e as orientações ao longo deste período.

Agradeço igualmente aos professores que fizeram parte desta caminhada, com orientações valiosas na banca de qualificação: Prof.ª. Dra. Ana Sílvia Moço Aparício (USCS) e Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti (UFOP).

Agradeço também ao Centro de Paula e Souza pela bolsa concedida em parte do programa.

“Todas as pessoas que passam por nossa vida são únicas, sempre deixam um pouco de si e leva um pouco de nós. Haverá os que levam muito, mas não haverá os que não deixam nada”.

Autor desconhecido

RESUMO

As avaliações em larga escala e a observação do cotidiano escolar têm mostrado que os alunos possuem dificuldades no aprendizado da álgebra. Muitas vezes, estas defasagens se iniciam desde o processo de alfabetização e se ampliam ao longo do percurso escolar. Apostamos na ideia de que o desenvolvimento do pensamento algébrico ao longo dos primeiros anos de escolaridade poderia favorecer o aprendizado da álgebra. Além disso, para amenizar tal situação, seria necessário propiciar aos alunos a oportunidade de aprenderem de diferentes formas, resolvendo problemas associados ao dia a dia e desenvolvendo um olhar mais investigativo. O presente trabalho se propôs a investigar, nos anos finais do Ensino Fundamental, estratégias de ensino que colaborem para o aprendizado da álgebra, numa perspectiva que promova no aluno uma atitude investigativa. Para a realização do estudo, inicialmente, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, a fim de identificar produções já existentes que tratassem da temática proposta, procurando analisar dificuldades e avanços no ensino da álgebra. Na sequência, apoiado na análise dos documentos oficiais – Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática e Base Nacional Comum Curricular (BNCC) - e nos estudos de Dario Fiorentini, Maria Ângela Miorim, Antônio Miguel, José Luiz Magalhães de Freitas e Lesley R. Booth, elaboramos uma avaliação diagnóstica, com o objetivo de identificar o conhecimento que os alunos tinham a respeito da pré-álgebra. Em posse dos resultados, estruturamos uma sequência didática que propiciasse tanto o aprendizado da álgebra quanto o desenvolvimento de uma postura investigativa. A análise dos dados gerados apontou que o desenvolvimento do pensamento algébrico é fundamental para o ensino da álgebra. Além disso, práticas que despertem no aluno uma postura investigativa proporcionam condições mais adequadas para o seu aprendizado. Por último, como resultado da pesquisa, apresentamos a proposição do estudo no formato de uma oficina, a qual teve como foco o desenvolvimento profissional docente.

Palavras-chave: Matemática. Desenvolvimento do pensamento científico. Ensino da álgebra. Formação de Professores. Sequência Didática.

ABSTRACT

Large-scale evaluations and a daily school observation have shown that the students have difficulties in the algebra learning. Many times, these lags begin from the literacy process and extend over the course of the school. We bet on the idea of that the development of the algebraic thinking along the first years of schooling could favor the learning of algebra. In addition, to soften the situation, it would be necessary to provide to the students the opportunity to learn in different ways, by solving problems associated with everyday life and developing a more investigative look. The present work aimed to investigate, in the final years of Elementary School, teaching strategies that collaborate to learn algebra, in a perspective that promotes in the student an investigative attitude. To the achievement of the study, a bibliographic research was carried out, in order to identify existing productions that deal with the proposed theme, looking to analyze difficulties and advances in the teaching of algebra. in sequence, based on the official documents – National Curricular Parameters (PCN) of Mathematics and the National Curricular Common Base (BNCC) and on the studies of Dario Fiorentini, Maria Ângela Miorim, Antônio Miguel, José Luiz Magalhães de Freitas and Lesley R. Booth, we elaborated a diagnostic evaluation, with the objective to identify the knowledge that the students had about pre-algebra. In the possession of the results, we structured a didactic sequence that propitiated both the learning of algebra and the development of an investigative posture. The analysis of the data generated pointed out that the development of algebraic thought is fundamental for the teaching of algebra. In addition, practices that wake up in the student an investigative posture provide more proper conditions for your learning. Finally, as result of the research, we present the proposition of the study in the form of a workshop, which focuses on the professional development of the teacher.

Keywords: Mathematics. Development of scientific thought. Teaching algebra. Formation of teachers. Didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
FURB	Universidade Regional de Blumenau
HAC	Hora de Atividade Coletiva
IBICT	Banco de Teses do Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
MEC	Ministério da Educação
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PPP	Projeto Político-Pedagógico
UFAM	Universidade Federal Do Amazonas
UFPA	Universidade Federal do Pará
UFS	Universidade Federal de Sergipe
UFSCar	Universidade Federal de São Carlos UFSCar
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A área de exatas, principalmente, a matemática sempre foi muito marcante em minha vida. Desde o Ensino Fundamental, identificava-me com a disciplina, o que fez com que no meu Ensino Médio optasse por realizar técnico em informática, uma vez que o raciocínio lógico-matemático é fator inerente à área computacional, o que também me direcionou para a primeira formação em nível superior, ciência da computação.

Antes mesmo do Ensino Médio, quando ainda fazia meus primeiros cursos na área de informática, fui convidado a trabalhar como monitor de informática. Eu auxiliava na aprendizagem dos alunos, o que despertou em mim gosto pelo ensino e pela profissão docente.

Esta relação com o ensino e com a matemática foi sendo ampliada durante a faculdade, o que me levou logo em seguida a fazer complementação pedagógica para ingressar como docente. Este processo ocorreu de fato após realização de concurso para docente no estado de São Paulo em 2012.

A minha carreira como professor na rede estadual de São Paulo durou seis anos e meio, iniciando-se no ensino regular do Ensino Fundamental – anos finais, quando atuei por três anos, trabalhando os três anos seguintes, no Programa de Ensino Integral. Deixei este cargo no início de 2018 para assumir um outro, o de professor na prefeitura de Itanhaém, exonerando do cargo estadual em meados de 2018 para assumir cargo de professor na prefeitura de Santos.

Na minha opinião, o que mais me aproximou da matemática foi exatamente a forma como eu era desafiado a resolver os problemas propostos, desenvolvendo meu raciocínio, fazendo-me pensar, criar possibilidades e chegar a conclusões. Tudo isso se ampliou com a aprendizagem da álgebra, por meio da qual existe uma infinidade de possibilidades que me permitiam desenvolver o raciocínio abstrato.

Em minha prática profissional, tenho observado que, atualmente, alunos pouco entendem aquilo o que estão estudando. Parecem, muitas vezes, inertes diante de seu aprendizado. Os professores, por sua vez, diante da inércia do aluno aparentam estar desmotivados, por estes e outros diversos motivos. Assim, nem os professores nem os alunos oferecem todo o potencial que possuem, o que pode ser um indício dos baixos níveis alcançados nas avaliações de larga escala, anualmente aplicadas aos ciclos finais. O questionamento acerca de quais são os motivos dessa desmotivação e de que forma os professores poderiam despertar no aluno a vontade de aprender, promovendo autonomia, consequentemente elevando os índices de avaliação, têm sido uma preocupação minha.

As avaliações em larga escala possuem como maior objetivo mensurar o desempenho dos alunos nas disciplinas de português e matemática e os resultados de ambas as disciplinas não têm sido bons. Além disso, a matemática, por sua vez, ainda é temida por grande parte dos alunos, o que torna o desafio do professor dessa disciplina ainda maior.

Diante desse quadro, muitas vezes, me perguntava como poderia tornar o ensino da matemática menos temeroso, mais desafiador, fazendo com que o aluno se sentisse instigado, curioso e com interesse em aprender? Ademais, quais estratégias poderiam ser utilizadas para aguçar a curiosidade do estudante e que o levasse a assumir uma postura investigativa? Eram questões que também me inquietavam. Enfim, foram estas perguntas que me provocaram interesse em continuar estudando.

Uma área, no campo da matemática, a qual causa muito desinteresse nos alunos em aprender, é a álgebra. É um conteúdo que está presente no currículo do Ensino Fundamental, ministrado a partir do sétimo ano. Um dos motivos que provocam esta situação é a característica abstrata do assunto, no qual a representação numérica passa a ser realizada também por meio de incógnitas.

Diante das dificuldades observadas nos alunos, ao longo destes seis anos, de entender os conceitos matemáticos, em especial, a álgebra, cuja introdução se dá nas redes de ensino, com alunos de aproximadamente onze anos, pretendo investigar o seguinte: que estratégias contribuem para o aprendizado da álgebra, fazendo com que o aluno se sinta desafiado, instigado, curioso? O que faria o aluno assumir uma postura investigativa?

O tema trata da questão de como os professores de matemática estão propiciando aos alunos o desenvolvimento de sua capacidade de pensar, gerando autonomia e ampliando assim seus conhecimentos. Dessa forma, são pensadas maneiras de permitir ao aluno desenvolver senso crítico, de modo a colaborar para o desenvolvimento de uma atitude investigativa.

Nesse sentido, a presente pesquisa possui como objetivo geral investigar, nos anos finais do Ensino Fundamental, estratégias de ensino que contribuam para o aprendizado da álgebra, numa perspectiva que promova no aluno uma atitude investigativa. Apostamos que aprender, sem perder de vista uma postura investigativa, curiosa, desafiadora – elementos importantes para uma atitude científica –, propicia condições mais adequadas para o aprendizado dos conteúdos da matemática. Além disso, compactuamos com a ideia de que a álgebra propõe um processo investigativo, pois proporciona um trabalho com incógnitas. Trabalhar com o conceito de incógnitas é comum a todas as ciências. Quando nos deparamos com o incógnito – aquilo que não se sabe –, uma atitude investigativa pode ser provocada.

A fim de se verificar na comunidade acadêmica produções que tratem do referido tema, foi realizado um levantamento junto ao Banco de Teses do Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT), cujos resultados podemos encontrar no próximo capítulo. De antemão, podemos afirmar que estes foram de fundamental importância para entender os desafios impostos pelo assunto e as principais dificuldades há tempos demonstradas pelos alunos.

Para alcançarmos esse objetivo geral, delineamos os seguintes objetivos específicos:

- conhecer e descrever quais as concepções que os estudantes têm a respeito do pensamento algébrico;
- identificar estratégias de ensino da pré-álgebra e álgebra que contribuam para o desenvolvimento de atitudes investigativas;
- analisar como essas estratégias de ensino colaboram no desenvolvimento de uma atitude investigativa/pensamento científico, procurando sistematizar ações propositivas;
- elaborar uma proposição que tenha como objetivo a formação continuada de professores com foco no processo de ensino e

aprendizagem da álgebra e o desenvolvimento de uma postura investigativa.

Um dos objetivos da escola é contribuir para a promoção de cidadãos críticos e autônomos, aproximando os conceitos matemáticos, e, no caso específico desta pesquisa, os conceitos algébricos, à realidade do aluno. Assim, é estimulada a capacidade de pensar. É importante tanto identificar estratégias de ensino em que professores de matemática propiciem o desenvolvimento de atitudes científicas quanto analisar como elas ocorrem na prática, democratizando as técnicas, de forma a possibilitar que outros professores também possam conhecê-las e analisá-las. A intenção com isso é tornar o ensino da álgebra mais prazeroso, permitindo ao aluno que desenvolva suas teorias, conquistando seus resultados, melhorando assim a qualidade tanto do ensino quanto da aprendizagem da álgebra.

Para o desenvolvimento desta pesquisa, seguiremos as seguintes etapas:

- 1ª etapa: levantamento, na base de dados do IBICT – dissertações e teses – que trate do ensino da álgebra;
- 2ª etapa: análise documental. Identificar nos documentos oficiais – Base Nacional Comum Curricular e Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino da Matemática – as diretrizes do ensino da álgebra;
- 3ª etapa: planejar intervenção pedagógica com apoio no referencial teórico estudado, deixando claro os objetivos a serem atingidos com a intervenção e a forma como será realizada a avaliação da intervenção.
- 4ª etapa: realizar a intervenção pedagógica planejada, relatando o antes e o depois da intervenção, bem como descrevendo a avaliação da intervenção com os achados referentes aos efeitos nos participantes e achados referentes à intervenção propriamente dita.
- 5ª etapa: após a análise dos dados que foram gerados, produziremos um material para formação continuada de professores – ensino da álgebra.

O trabalho será estruturado nos seguintes capítulos: no primeiro capítulo, “Pesquisa correlatas”, apresentamos alguns estudos que tiveram como foco o ensino da álgebra, procurando identificar as contribuições das pesquisas para o presente trabalho.

No segundo capítulo, “O ensino de álgebra: alguns pressupostos”, exibiremos um pouco da história da matemática e a sua influência na atualidade, o desenvolvimento da álgebra ao longo do tempo, bem como o conceito de álgebra no campo da educação matemática, procurando explicitar algumas propostas de ensino.

No terceiro capítulo, “A álgebra nos documentos oficiais”, analisamos dois documentos, a Base Nacional Comum Curricular e os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino da Matemática, identificando como estes textos sugerem o ensino da álgebra.

No quarto capítulo, “O método e os procedimentos metodológicos”, apresentamos a escolha do método e dos procedimentos utilizados na pesquisa. A intenção é mostrarmos como os dados foram gerados e a sua análise.

No quinto capítulo, “Os dados gerados: o ensino da álgebra numa perspectiva investigativa”, apresentamos e analisamos a intervenção realizada, traçando as ações entre os alunos e seus colegas e entre eles e o professor, destacando em suas produções os avanços na aprendizagem no campo da álgebra.

No sexto capítulo, “O produto: oficina para o ensino da álgebra”, explicitamos a proposição da presente pesquisa, que constitui uma oficina de formação continuada de professores em relação ao ensino da álgebra. Esperamos, com isso, contribuir para os avanços das discussões do ensino da álgebra, ampliando as possibilidades de aprendizagem dos alunos, por meio do desenvolvimento do pensamento algébrico e de atitudes investigativas.

Por último, as considerações finais são tecidas e a bibliografia é divulgada.

2 PESQUISAS CORRELATAS

Apresentamos, nesse capítulo, alguns estudos que tiveram como foco o ensino da álgebra, procurando identificar as contribuições das pesquisas para o presente trabalho.

2.1 Alguns estudos sobre o ensino da álgebra e o pensamento científico

Com a intenção de conhecer pesquisas que tratam da temática proposta, foi realizada uma pesquisa no banco de teses do IBICT, em fevereiro de 2018, utilizando como palavras-chave: pensamento algébrico; álgebra; aritmética; investigação matemática, no período de 2014 até 2018. Obtemos, com isso, as pesquisas abaixo relacionadas, selecionadas a partir do resumo e que guardam relação com o ensino da álgebra e estratégias de ensino.

O trabalho de Jonas Marques dos Santos Queiroz (2014), da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), intitulado: “Resolução de problema da pré-álgebra e álgebra para fundamental II do ensino básico com o auxílio do modelo de barras” (Mestrado), objetivou verificar como é realizada a transição da aritmética para a álgebra, propondo situações como resolução de problemas e um modelo matemático desenvolvido em Singapura. Teve como público-alvo alunos do Ensino Fundamental.

O resumo apresentou as seguintes palavras-chave: transição da aritmética para a álgebra, metodologia de resolução de problemas, metodologia do modelo de barras e matemática de Singapura. Procurou identificar a dificuldade dos alunos de oitavos e nonos anos na aprendizagem da álgebra, tendo como pressuposto desta dificuldade a forma como a álgebra é abordada nos anos anteriores e a passagem da aritmética para a álgebra, isto é, a chamada pré-álgebra. Ele embasou sua pesquisa na aplicação de seis atividades a turmas de sétimo ano e tem como produto uma sequência didática que poderia auxiliar na melhoria do ensino. Na pesquisa, o autor se utilizou do método de resolução de problemas de George Polya, aliando-o ao modelo de barras – técnica utilizada nos bancos escolares de Singapura. Destacou no trabalho a importância dos primeiros passos do aluno na álgebra, observando que deveriam ser bem planejados

Existe também o trabalho de Mirleide Andrade Silva (2014), da Universidade Federal de Sergipe (UFS), cuja Dissertação de Mestrado “Resolução de problemas algébricos: uma investigação sobre estratégias utilizadas por alunos de 8º e 9º ano do Ensino Fundamental da rede municipal de Aracaju/SE" objetivou identificar e examinar estratégias utilizadas por alunos da rede municipal de Aracaju na resolução de problemas algébricos, o que pode ser comprovado desde o título. A autora iniciou a pesquisa mediante uma seleção por meio de um questionário e entrevista com 20% dos alunos pesquisados, utilizando como suporte George Polya (1978). Após a análise do livro, a autora focou seu trabalho nos problemas algébricos. Concluiu em sua pesquisa que a maioria dos alunos utiliza a aritmética para a resolução de problemas algébricos. Assim, ela ressalta a necessidade de os alunos se apropriarem dos conteúdos algébricos.

Tatiana Lopes de Miranda (2014) apresentou um estudo à Universidade Federal do Pará (UFPA) –Mestrado, cujo objetivo foi investigar entre os alunos do Ensino Fundamental a noção de variável, a fim de contribuir para a compreensão da álgebra escolar. A pesquisa se constituiu em duas fases: uma pesquisa bibliográfica e um trabalho de campo, fundamentado na aplicação de três questionários aplicados a 65 alunos. A autora concluiu que os alunos não dominam a noção de variável de acordo com o referencial teórico estudado, o que, segundo ela, representa um obstáculo na aprendizagem algébrica.

Por sua vez, a Tese de Doutorado de Márcia Aguiar (2014) da Universidade de São Paulo (USP), cujo tema foi "O percurso da didatização do pensamento algébrico no Ensino Fundamental: uma análise a partir da transposição didática e da teoria antropológica do didático" pretendeu analisar a forma como os livros didáticos permitem a construção do pensamento algébrico. Concluiu que os livros mantêm o ensino da álgebra voltado para o treino de procedimentos e resoluções, mas que, em algumas obras, foram encontradas situações as quais favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Daiana Dallagnoli Civinski (2015) da Universidade Regional de Blumenau (FURB) , com o seu trabalho cujo título é "Introdução ao estudo da aritmética e da álgebra no Ensino Fundamental" (Mestrado), analisou uma proposta pedagógica com atividades relacionadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico para o Ensino Fundamental. Seu foco é atribuído às diferentes interpretações sobre o símbolo de igualdade como ação na aritmética e equivalência na álgebra. A autora, em suas considerações, criticou a introdução à álgebra com exercícios repetitivos. Além disso, o entendimento de alguns sinais na aritmética também é um fator que prejudica a aprendizagem algébrica. Dessa forma, ela sugeriu uma série de atividades que poderiam auxiliar na passagem aritmética-álgebra.

Meng Huey Hsu (2015), da Universidade Federal Do Amazonas (UFAM), cuja Dissertação de Mestrado foi intitulada de “Reflexões sobre o ensino da álgebra para professores de matemática do Ensino Fundamental da rede municipal de Manaus: uma proposta metodológica”, estabeleceu uma reflexão sobre o ensino da álgebra, enfatizando a importância da formação continuada dos professores. São propostas atividades com recursos alternativos para o ensino dos conteúdos nos quais os alunos costumam apresentar mais dificuldade na álgebra.

O autor analisou alguns erros comuns cometidos pelos alunos na álgebra e justifica-os com o ensino falho da aritmética. Tendo em vista que o foco do trabalho era a formação continuada do professor, como produto foi realizada uma série de oficinas, as quais, segundo os participantes, foram importantes para a formação continuada e certamente resultariam em reflexos na sala de aula.

Já o trabalho de Mestrado de Ayrton Góes de Magalhães, do Centro Universitário Univates, com o tema: “Construção de conceitos algébricos com alunos do 7º ano”, teve como objetivo analisar as dificuldades para a construção de conceitos algébricos. Utilizou como aporte teórico Usikin (1999) e Linz e Gimenez (2006). Por fim, Magalhães concluiu que os alunos pesquisados apresentam lacunas em relação à aritmética, erros na elaboração de algumas regras, além de dificuldade de identificar generalizações. Suas palavras-chave foram: álgebra, padrões e generalização.

2.2 Algumas considerações

Os estudos realizados foram fundamentais para o andamento do presente trabalho, uma vez que tratam principalmente das dificuldades encontradas pelos alunos e pelos professores no ensino da álgebra, em especial na sua introdução. Sobretudo, destaca-se o trabalho de Civinski (2015) o qual, em suas observações, constatou a importância de propor situações que conectem a aritmética e a álgebra já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, sem a utilização, ainda, no entanto, da linguagem abstrata, porém com atividades que enfatizem o significado do sinal de igualdade como uma equivalência e situações que ajudem a desenvolver o pensamento algébrico, como as que abrangem regularidades e padrões.

Cumpre lembrar que na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2017), documento que será apresentado posteriormente, constatamos o surgimento oficial do tema álgebra desde os anos iniciais, com o objetivo de permitir aos estudantes o desenvolvimento do pensamento algébrico, desde os primeiros contatos com a matemática, o que de fato é um dos fatores que pode constituir obstáculo no ensino da álgebra. A BNCC (Brasil, 2017) em vigor – ao relacionar o campo “álgebra” como grande tema – apresenta grandes avanços neste sentido, sendo fundamental para facilitar a aprendizagem dos conceitos abstratos no futuro.

Saber trabalhar algebricamente com competência é importante para o desenvolvimento futuro dos alunos, pois eles irão se deparar com situações de resolução de problemas e poderão utilizar a álgebra como recurso. Hsu (2015) coloca em seu trabalho que as situações de cálculo por si só, embora de extrema importância, são insuficientes para que os alunos possam mobilizar conhecimentos diante de situações-problemas em contextos diferentes, nem são capazes de colocar-lhes condições de pensar matematicamente. Destaca ainda a grande aplicação da álgebra na resolução de problema, além de outros campos matemáticos.

Cabe ainda ressaltar que a álgebra é pré-requisito para o entendimento de diversos assuntos nos anos seguintes. Identificar em que momento os alunos estão deixando de adquirir competências relacionadas à álgebra pode auxiliar os professores em seu planejamento e consequentemente suscitará melhoria na aprendizagem. Queiroz (2014) levanta a hipótese de que a transição da aritmética para a álgebra pode ser um desses momentos críticos no processo de ensino e aprendizagem dos alunos, assim como o próprio desenvolvimento do pensamento algébrico em momentos corretos de escolaridade.

As pesquisas realizadas contribuíram para subsidiar o planejamento da intervenção realizada, para ratificar alguns entendimentos relacionados ao ensino da álgebra, tais como: a necessidade de desenvolver o pensamento algébrico desde os anos iniciais, a importância de relacionar a aritmética com a álgebra. A presente pesquisa contribui para o ensino da álgebra, uma vez que ao enfatizar o desenvolvimento do pensamento algébrico privilegiando uma atitude investigativa e a construção de estratégias de ensino, a aprendizagem da álgebra pode ser facilitada.

3 O ENSINO DE ÁLGEBRA: ALGUNS PRESSUPOSTOS

Neste capítulo, apresentaremos algumas reflexões acerca da história da matemática e o seu desenvolvimento ao longo do tempo. Em seguida, discutiremos como a álgebra se desenvolveu no campo da matemática, baseando-se na concepção de alguns autores que se aplicaram no estudo do tema.

3.1 A história da matemática

A área de estudo conhecida como a história da matemática é principalmente uma investigação sobre a origem das descobertas na matemática e, em menor escala, uma investigação sobre os métodos matemáticos e a notação do passado, seu estudo data desde os tempos da pré-história (4.000 a. C.), quando surgiu o cultivo de plantas (agricultura) e a criação de animais (pastoreio). Nessa época, os pastores de ovelhas precisavam controlar seus rebanhos para saber se não estava faltando ovelhas. Os homens começaram a pensar a forma de controlar o número de ovelhas e utilizavam a matemática, mesmo sem saber do que se tratava.

De acordo com Eves (2004), para controlar a quantidade de ovelhas que saiam, o pastor separava uma pedra para cada animal que passava, e, ao voltar, ele retirava do monte a pedra de cada ovelha. A ausência de pedras, significava que o rebanho estava completo.

De acordo com Mol (2013), pode-se perceber a evolução da matemática durante a história da humanidade. Para o autor o ser humano possui habilidades naturais noções quantitativas como, por exemplo, muito ou pouco, pequeno ou grande, mas com o surgimento das necessidades do cotidiano, como organização do espaço, técnicas de produção e as relações comerciais, viu a necessidade de pensar numericamente. Com a chegada da Idade Antiga (4.000 a. C. até 476 d. C.), diversos progressos ocorram na área da metalurgia e engenharia, no entanto o principal avanço foi o desenvolvimento da forma de comunicação escrita mais antiga, os babilônios utilizavam um sistema de numeração cuneiforme, ou seja, os números tinham forma de cunha.

> Os mesopotâmicos usavam como suporte para sua escrita placas de argila, que eram marcadas com estilete e, em seguida, eram cozidas ou secas ao sol para aumentar sua durabilidade. Essas tabuletas, normalmente retangulares, tinham espessura pouco maior que 2 cm, com tamanhos variando de poucos a algumas dezenas de centímetros. Tais objetos se mostraram muito mais resistentes à ação do tempo do que outros suportes de escrita utilizados ao longo da história, como por exemplo os papiros egípcios (MOL, 2013, p. 16).

No Egito, as regras matemáticas eram utilizadas para resolver problemas aritméticos e algébricos, enquanto os babilônios e os assírios utilizavam cálculos para verificar áreas de triângulos e quadriláteros, volumes de prismas e de pirâmides (EVES, 2004).

Os babilônios desenvolveram um sistema simbólico: eram pequenos objetos em argila com diferentes formas geométricas que utilizavam para fazer o registro de seus bens e comércio. Shen et al. (1999, p. 21) elucida que “um cilindro de argila podia representar um animal, duas esferas dois *bushel* (medida de capacidade) de cereal”.

Figura 1 – Sistema simbólico de pequenos objetos de argila

Fonte: LISA (2003).

A criação dos símbolos foi um passo muito importante para o desenvolvimento da matemática, antigamente, o homem juntava 2 bastões com 6 bastões para obter 8 bastões. Hoje, sabemos representar esta operação por meio de símbolos. 2 + 6 = 8”.

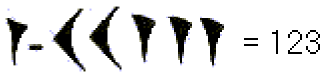
Por volta de 3.000 a. C., os sumérios se desenvolveram na Mesopotâmia por ter uma organização social e econômica complexa e, juntamente a isso, o sistema numérico evolui para uma forma de sistema sexagesimal. Os registros escritos eram feitos em pequenas placas de argila, com estiletes de metal, osso ou marfim, que depois colocavam a secar ao sol (MOL, 2013).

De 2100 a. C. a 2004 a. C., os sumérios consolidaram os sistemas jurídico e meteorológico, o calendário, além de construírem templos. Durante aproximadamente um século os sumérios viveram um período de grande prosperidade. Porém, por volta de 2300 a. C, os acadinos, povos de origem semita, ocuparam a Mesopotâmia, dominando os sumérios, que desaparecem quase por completo. Com as invasões estrangeiras na Mesopotâmia, o Império Acadino se extingue. Sob o domínio do rei Hamurabi, a Babilônia passa a ser a capital da Mesopotâmia.

Os babilônios utilizavam um traço vertical para representar as unidades e outro desenho para as dezenas. No sistema decimal, os números de 1 a 99 eram representados por agrupamentos destes símbolos (SMITH, 1992):

O símbolo para 100 era composto por traços.

Números superiores a 100, representados novamente por agrupamento. Assim, por exemplo, temos (SMITH, 1992):



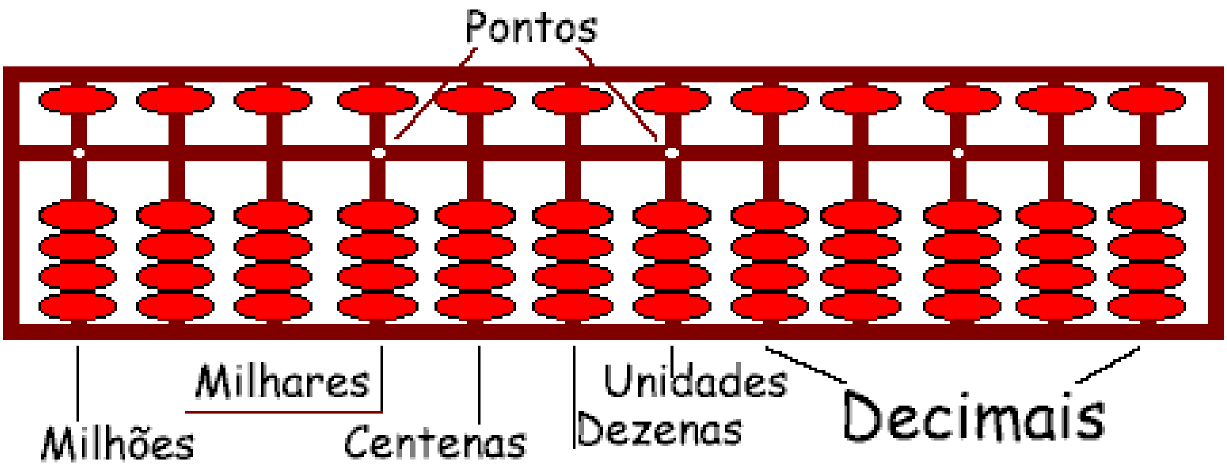
O símbolo  indica 10 vezes 100, isto é, 1.000. Os babilônios chegaram a empregar um símbolo, formado por duas cunhas inclinadas, para representar a ausência de um grupo (SMITH, 1992).

Como este símbolo não era de uso frequente, e ainda nunca foi usado no fim de uma expressão, o sistema babilônio apresentava ambiguidades.

Por exemplo, este mesmo símbolo poderia representar os seguintes números: 12 ou 12 x 60 = 720 ou 12 x 60^2 = 43.200 (SMITH, 1992). Muitas tábuas em escrita cuneiforme se encontram em museus e a sua denominação depende da coleção a que pertence. As tábuas aqui apresentadas encontram-se no Museu do Louvre e é do antigo período da Babilônia que vai de 2004 a 1595 a. C.

Um instrumento utilizado para facilitar os cálculos no período de 3500 a. C foi o ábaco, iniciado como uma tábua com sulcos e contadores, evoluiu para uma estrutura com hastes metálicas com contas deslizantes. Sua forma é uma moldura retangular com fileiras de arame, cada fileira representando uma classe decimal diferente, nas quais correm pequenas bolas. A figura ilustra o ábaco:

Figura 2 – Ábaco

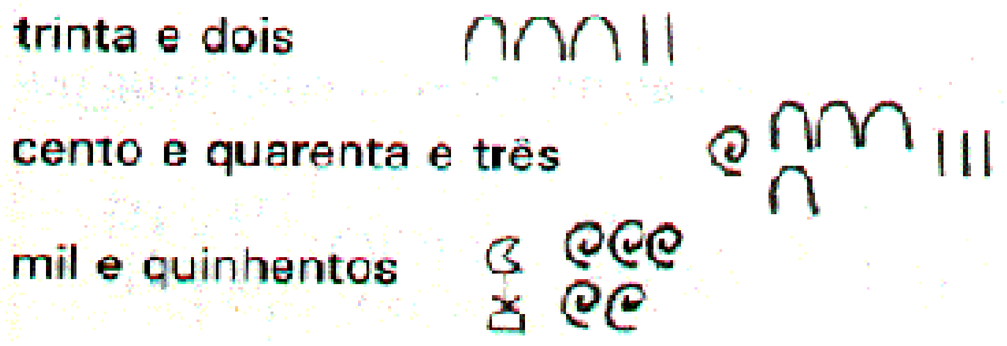


Fonte: LISA (2003).

O comércio egípcio passou a se desenvolver rapidamente e com isso era preciso efetuar cálculos com rapidez, processo no qual a criação de símbolos foi um passo fundamental para o desenvolvimento da matemática.

Por volta de 3600 a. C., foi escrito um antigo manual de matemática com 80 problemas, com suas resoluções, os problemas tratavam de assuntos do dia a dia, como o preço de pão, a armazenagem de grãos de trigo e a alimentação de gado. O manual citado é o Papiro Ahmes e foi escrito por Aahmesu, faraó egípcio. (SMITH, 1992). O sistema de numeração egípcio baseava-se em sete números-chave: 1 - 10 - 100 – 1.000 – 100.00 – 100.000 - 1.000.000. Na combinação dos número-chave se escreviam os demais números, por exemplo:

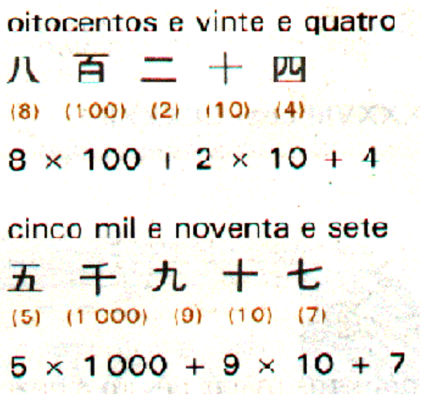
Figura 3 – Combinação de números-chave



Fonte: Smith (1992).

Diante do desenvolvimento da civilização chinesa a partir do 3º milênio a. C., surgem os primeiros numerais chineses inscritos sobre carapaças de tartaruga e ossos de animais utilizados para adivinhações, esses símbolos ainda são usados na China e no Japão, no entanto para a realização de cálculos utilizam o sistema indo-arábico, conforme ilustra a figura a seguir:

Figura 4 – Símbolos utilizados na China



Fonte: LISA (2003).

A civilização grega utilizava a matemática de caráter dedutivo, sem a precisão de livros, mas com utilização de demonstrações, utilizando-se de símbolos para representar os números.

Por volta de 476 a 1453 (idade média), ocorre a extinção da matemática grega na Babilônia, e com isso os gregos criaram o método axiomático-dedutivo, o qual consiste em admitir como verdadeiras certas preposições e, a partir delas, por meio de um encadeamento lógico, chegar a proposições mais gerais (SHEN, et al., 1999).

Leonardo de Pisa, matemático italiano, também conhecido por Fibonacci, no ano de 1202, cria uma obra intitulada "*líber abaci*" na qual descreve a "arte de calcular" (aritmética e álgebra), apresentando soluções de equações do 1º, 2º e 3º graus.

A álgebra passou a apresentar seu aspecto formal na Idade Moderna (de 1453 a 1789), quando passou por grande desenvolvimento, até que no século XVII, René Descartes descobre a geometria analítica, que consiste em aplicações de métodos algébricos à geometria, enquanto Pierre Fermat desenvolve os números primos.

Já na Idade Contemporânea (de 1789 até os tempos atuais), a matemática foi impulsionada pela geometria analítica e o cálculo, sofrendo ramificações em diversas disciplinas, a partir do século XIX, tornando-se cada vez mais abstrata, o que pode justificar a dificuldade que muitas pessoas encontram na disciplina.

3.2 A álgebra ao longo dos tempos

Uma vez entendido como a matemática veio se desenvolvendo, é importante também observar como a álgebra sofreu diversas transformações ao longo da história. Existem registros na história desde os povos antigos sobre a utilização da matemática, desde a necessidade dos egípcios em superar os números naturais, até referências à álgebra na Babilônia, isso há aproximadamente 1700 anos antes de Cristo.

Os gregos, com o objetivo de generalização, passaram a representar os valores desconhecidos com figuras geométricas, ideia fixa e imutável, até mesmo para atender as necessidades ideológicas da época, que era manter uma sociedade dominada pelos senhores sobre seus escravos.

Com o passar do tempo e a partir das ideias do filósofo grego Diofanto, passou-se à necessidade da ideia do movimento, de representar tal movimento de alguma forma, isto é, retratar algo variável e não fixo. Foi quando, pela primeira vez, foram utilizadas letras nesta representação (ARAUJO, 2008).

Diofanto de Alexandria escreveu treze livros diretamente relacionados à aritmética, provavelmente uma compilação dos conhecimentos da época. O que se destaca em seus escritos são os enunciados abstratos e gerais, o que nos faz recordar da álgebra como hoje a conhecemos; no entanto, sua preocupação não era a de soluções gerais, mas sim, particulares. Outro fator a se considerar em sua obra foi o abandono da retórica e a utilização de símbolos, não sendo estes na época elementos de manipulação algébrica (MOL, 2013).

Embora Diofanto tenha sido considerado por muitos como “pai da álgebra”, a matemática árabe foi a que de fato trouxe grandes contribuições. Conforme Mol (2013, p. 66) “os árabes conjugaram o rigor grego às visões práticas babilônica e hindu para, a partir daí introduzir elementos originais que deram uma nova vida à matemática”.

Um dos fatores marcantes foi a criação da cidade de Bagdá, que substituiria Damasco como capital (hoje, da Síria). Juntamente com a cidade, foi construída uma biblioteca, sendo dados muitos incentivos ao estudo das ciências.

Esta biblioteca era conhecida como “casa da sabedoria” e posteriormente se tornaria uma instituição de ensino onde um de seus acadêmicos era Muhammad Ibn Musa al-Khowarizmi. Ele escreveu duas obras importantes, uma que discutia o sistema de numeração posicional e outra chamada *Tratado sobre o cálculo de al-Jabr e al-Muqabalah*, livro o qual fez com que a álgebra fosse vista como área de conhecimento, sendo que o próprio nome álgebra foi uma evolução do termo “al-Jabr”.

Carl Boyer, historiador da matemática, classifica a história da álgebra em três estágios: “(...) (1) o primitivo, ou retórico, em que tudo é completamente escrito em palavras; (2) um estágio intermediário, sincopado, em que são adotadas algumas abreviações; e (3) um estágio simbólico ou final” (BOYER, 1974, p. 132). O autor, ao analisar a obra de Diofanto, encaixa-o no estágio intermediário, principalmente pela preocupação em alcançar as resoluções dos problemas específicos e não em encontrar generalizações. Já em relação à obra de al-Khowarizmi, Boyer a pesa e a classifica como estágio primitivo, ao afirmar ser a obra bem mais próxima da álgebra elementar atualmente conhecida, o que o motivou a considerar al-Khowarizmi o verdadeiro “pai da álgebra”.

Antes de falarmos dos estudos mais recentes da história da álgebra, convém comentar como a álgebra se desenvolveu na Europa, durante a idade média, por se tratar de uma época de grandes avanços. Um dos precursores do estudo algébrico na Europa foi Leonardo de Pisa, também conhecido por Fibonacci, considerado o matemático mais importante da Europa em sua época. Por ser filho de comerciante, passou um bom tempo em viagens, sendo que na Argélia aprendeu árabe e a gostar da matemática. Então, entrou na época em contato com a álgebra árabe e os numerais indo-arábicos, sofrendo forte influência de al-Khowarizmi. Após retornar à Europa, escreveu o *Liber Abaci* (livro dos ábacos) e *Pratictica Geometrica*, de 1220. Neste último, ele estudou a aplicação da álgebra na resolução de problemas relacionados à geometria. Seus estudos forneceram material para que matemáticos italianos contribuíssem para o progresso da álgebra no período Renascentista. “No entanto, a matemática no período Renascentista foi marcada pelo desenvolvimento da álgebra, representando uma continuidade com respeito à tradição medieval árabe e europeia” (MOL, 2013, p. 83).

O período Renascentista ocorre após uma fase complicada na Europa, marcada pela Guerra dos Cem Anos (1337-1453) e o da Grande Peste (1348-1352), o que gerou um período pouco criativo e de poucos avanços na ciência. Esta fase leva este nome, pois, após todos estes infortúnios, ocorreu o Renascimento na Europa em diversas áreas, entre elas, a da ciência.

A confiança no potencial humano era característica daquela época. Assim, com o ambiente criativo favorável, o desenvolvimento de técnicas e a experiência acumulada, a ciência era constantemente estimulada por novos desafios. Considerando que foi no período Renascentista que a álgebra passou por grandes progressos, importa comentar sobre alguns estudiosos que contribuíram para estes avanços.

O primeiro que destacamos é o padre franciscano Lucas Pacioli, quem, em 1494, escreveu um livro que tratava de quatro assuntos: aritmética, álgebra, geometria euclidiana e contabilidade, sendo este o primeiro livro impresso a tratar de álgebra. Ele rompeu com a inércia de produções científicas da época.

Além da Itália, outros países europeus também despertaram o interesse pelo estudo da álgebra. Na Alemanha, diversos foram os livros editados. Para designar uma variável, era utilizada a palavra Coss (Coisa), palavra esta que deu origem ao nome da escola algebrista *Die Coss*. A principal contribuição desta escola foi promover uma álgebra com notação simples e eficiente. Por exemplo, os símbolos que até hoje utilizamos de adição (+) e subtração (-) vieram desta escola, bem como a utilização de letras como variáveis.

Retornando à Itália, citamos o mais importante algebrista da época, Gerolamo Cardano, que tanto realizou diversos estudos na resolução de equações de terceiro grau, quanto descobriu que o grau da equação indicava o número possível de soluções para ela. No entanto, sua principal contribuição foi a descoberta das raízes quadradas de números negativos, trabalho este definitivamente incorporado à álgebra pelo último algebrista renascentista, Rafael Bombelli, em seu tratado sobre a álgebra, o qual contribuiu para uma forma mais abstrata da álgebra.

Porém, não poderíamos deixar de citar François Viète, que passou a identificar não somente as variáveis por letras, como também os coeficientes das variáveis. Ele utilizava as vogais, para variáveis desconhecidas, e as consoantes, para variáveis conhecidas, sendo sua contribuição mais relevante a libertação da álgebra de casos particulares, partindo para a ideia de que hoje possuímos os de generalização (MOL, 2013, p. 93).

3.3 História da álgebra: alguns pressupostos

A matemática é uma das disciplinas mais temidas do percurso escolar para muitos estudantes. Este temor é instaurado durante os anos de estudos por motivos até então desconhecidos, mas que podem ser objeto de pesquisa, dada a sua relevância. No entanto, esse aspecto não é o foco desta pesquisa. O fato de apresentarem este temor cria dificuldades na aprendizagem, que, se não sanadas, podem perpetuar por toda uma vida. As dificuldades aumentam quando o assunto matemático a ser estudado está relacionado à álgebra. Booth (1995) afirma que a álgebra é fonte de confusão e atitudes negativas entre os alunos, e isso provavelmente ocorre diante do caráter abstrato do tema, o qual de fato é maior que o da aritmética, por exemplo. Para entender este contexto, veremos alguns pressupostos.

A partir de diferentes óticas, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 78-82) fizeram um estudo sobre a história da álgebra, realizando algumas classificações. A primeira em destaque é a divisão da álgebra em álgebra clássica ou elementar e álgebra moderna ou abstrata, sendo o marco o momento em que a álgebra ultrapassa o domínio das equações e operações clássicas e avança para o estudo de objetos abstratos. Neste sentido:

> a passagem da álgebra clássica para a assim chamada álgebra abstrata foi um processo sumamente interessante. Representa não somente um progresso quanto aos conteúdos técnico-científicos da disciplina como amplia consideravelmente o seu campo de aplicação e, o que é mais importante, implica – num certo sentido – uma mudança na própria concepção do que a matemática é, da compreensão de sua condição de ciência independente e da evolução dos métodos de trabalho (MILIES, 2004, p. 8).

Outra classificação citada pelo autor é enxergar a álgebra sob o olhar das contribuições dos povos antigos. Assim, a álgebra é qualificada como: “álgebra egípcia”, “álgebra árabe”, “álgebra babilônica” e assim por diante.

Uma terceira classificação por ele exposta é aquela que também é proposta por Boyer, dividindo a álgebra em estágios primitivo, sincopado e simbólico. O estágio primitivo tem como característica a não utilização de símbolos e abreviações para representar o pensamento algébrico, chamado também de retórico verbal. Todos os passos eram escritos na língua materna.

Este estágio pode ser bem percebido na álgebra babilônica, egípcia e grega antes de Diofanto. Já o estágio sincopado tem por principal qualidade a adoção de algumas abreviações; nesta fase, podemos inserir a álgebra desenvolvida por Diofanto e pelos algebristas italianos.

A fim de exemplificação, podemos utilizar uma expressão de Cardano “*Cubus p.6 rebus aequalis 20*”, referindo-se à equação $x^3 + 6x = 20$. O último estágio é o simbólico; como o próprio nome já induz, nele é predominante os símbolos sem a utilização de palavras.

Embora Viète utilizasse o estilo sincopado, foi grande a sua contribuição na inserção de diversos símbolos, fato consolidado por Descartes, que passou a utilizar as últimas letras do alfabeto para incógnitas e variáveis, como x, y e z, e as primeiras como constantes, a, b e c. Podemos perceber claramente esta contribuição ao pensar na forma geral de uma equação de 2º grau que utilizamos atualmente: $ax^2 + bx + c = 0$.

Uma quarta visão está baseada nos estudos de Jacob Klein, o qual estabeleceu um estudo comparativo entre a álgebra de Diofanto e a de Viète. Ele divide a álgebra no antes e no depois de Viète, afirmando que antes de Viète a utilização do símbolo era restrita a uma quantidade a ser descoberta, e, após os estudos de Viète, surgiram diversos conceitos na utilização dos símbolos, representando números conhecidos, como os coeficientes desconhecidos das equações traduzidos por consoantes e as variáveis expressas por vogais.

A quinta forma de observar se baseia nos estudos de Piaget e Garcia e divide a álgebra em três grandes momentos: período intraoperacional, que enxergava cada problema em particular, assim, para cada equação, buscava-se uma solução específica; período interoperacional, que se direciona para a ideia de generalização de uma equação; e o período transoperacional, no qual a álgebra sofre influência do cálculo, buscando não os tipos dos números, mas sim suas propriedades.

Após entendermos um pouco sobre a história da álgebra, retomamos as pesquisas de Booth (1995). Estas afirmam que a álgebra é fonte de confusão entre os alunos, fato que se baseia em estudos realizados na Inglaterra sobre a memória de adultos referente à matemática. A autora deixa claro que o sentimento é bem atual, tanto na opinião dos professores quanto na dos alunos, que consideram a álgebra de difícil aprendizagem. Para a realização de seus estudos, a autora investiga alunos de 13 a 16 anos que já vinham estudando álgebra. Independentemente da diferença de idade, a autora percebeu semelhança nos erros cometidos, identificando algumas premissas, como: o foco da atividade algébrica, a compreensão das notações e convenções e os métodos informais utilizados pelos alunos.

Quando se refere ao foco da atividade, faz uma comparação com a aritmética, na qual o objetivo é encontrar o resultado de determinados problemas, enquanto que na álgebra é totalmente diferente, tratando-se da generalização, o que muitos alunos não entendem. Imaginemos a seguinte problemática: qual é o número que, somado ao número 3, tem como resultado 5? Por se tratar de um problema de simples compreensão, a utilização simples da aritmética pode solucionar o problema, bastando para isso pensar que número, adicionado a três, é igual a 5. No entanto, se buscarmos uma solução algébrica antes de alcançar o resultado, faz-se necessário criar uma afirmação geral.

Por exemplo, para encontrar o resultado podemos equacionar $x + 3 = 5$. Na sequência para chegar ao resultado, o aluno necessita realizar uma série de procedimentos. O entendimento de todo este processo se torna difícil se o aluno não entender que o foco da álgebra é, exatamente, buscar a generalização, e não somente encontrar o resultado. A dificuldade do aluno consiste em entender a necessidade de formular uma expressão para então buscar um resultado, quando somente ao observar e raciocinar chegar-se-ia ao referido resultado. Transformar a língua materna em linguagem matemática é fundamental para a álgebra.

Outro fator que a autora também destacou como fonte de erro dos alunos foi a compreensão das notações e convenções. Para exemplificar, podemos pensar no real significado do sinal de igualdade "=", que, na aritmética, muitas vezes, é visto como a necessidade de uma resposta, quando na verdade seu significado real é de equivalência. Assim, o aluno deveria ser capaz de entender uma notação do tipo $3 + 4 = 4 + 3$, e não somente $3 + 4 = 7$. Outro exemplo que podemos utilizar diz respeito ao objetivo do sinal operatório da adição. Na aritmética, a ideia principal da adição é a de juntar, induzindo o aluno a realizar uma ação, o que pode gerar erros do tipo $a + b = ab$. O aluno necessita entender que $3 + 4$ não é apenas uma instrução, mas sim o resultado de uma adição, um número que é quatro unidades maior que três. Esta sensação de que chegar ao resultado sem saber os motivos que o fizeram responder daquela forma atrapalha o desenvolvimento do pensamento algébrico.

No que diz respeito aos métodos informais, a autora cita, por exemplo, como o aluno estabelece a quantidade de dois determinados conjuntos. Se o aluno chega ao resultado realizando a adição, não terá dificuldades de futuramente estabelecer uma generalização como, por exemplo, $a + b$. Porém, se o aluno resolve o problema usando o processo de contagem (método informal), terá esta dificuldade, por exemplo, se o aluno, para executar a adição de 3 com 2, pensar que a partir do 3 deve contar mais 2, chegando ao resultado 5, como o faria na soma de a com b.

É interessante, aliás, observar que, embora o livro citado tenha sido escrito há mais de 20 anos, os erros analisados pela autora ainda permanecem nas salas de aulas. Podemos perceber que atualmente os fatores levantados ainda são relevantes, pois os alunos diante de um problema algébrico costumam buscar diretamente uma solução numérica, uma vez que assim foram ensinados.

Nota-se também o mau entendimento dos símbolos matemáticos, como, por exemplo, o sinal de igualdade e até mesmo a utilização de métodos informais, como o processo de contagem exemplificado anteriormente. Há um fato, no entanto, que se sobrepõe: a ideia abstrata de representar qualquer número por uma letra causa angústia no aluno por causa da falta de compreensão.

Freitas (2003) afirma que a fonte de dificuldade dos alunos se encontra na passagem da aritmética para a álgebra. O autor realizou um estudo com alunos de 14 e 15 anos, utilizando-se de problemas envolvendo passagem da aritmética para a álgebra, fazendo uma análise das linguagens natural, numérica e algébrica. A linguagem natural é aquela que se manifesta por associação verbal ao conceito, empregando raciocínio argumentativo ou dedutivo.

O raciocínio dedutivo é aquele que está fundamentado em definições, propriedades e teoremas, já o argumentativo se apoia em crenças e observações. A linguagem numérica está associada à representação de números inteiros, decimais e fracionários, enquanto a linguagem algébrica se refere a expressões literais e equações. O autor deixa clara a dificuldade dos alunos de justificar uma resposta valendo-se da linguagem algébrica.

Na pesquisa, o autor propôs um problema aos alunos, analisando as respostas e observando as linguagens acima citadas. O problema dizia que um aluno encontrou 3 números ímpares cuja soma é 20, qual seria a solução. Para análise das respostas dos alunos, o autor dividiu as respostas em três classes: provas pragmáticas, que se apoia em tentativas numéricas associadas a experiências; neste caso, o aluno firma sua convicção por meio de casos particulares e observa-se a predominância da linguagem numérica e linguagem natural. A segunda classe denominou-se prova por enunciados; nesta, o aluno organiza sua resposta em diversas proposições em linguagem natural. Por fim, a terceira é chamada de prova algébrica, na qual as proposições são validadas por registros de representações algébrica. O autor percebeu que a maioria das respostas se embasava na linguagem numérica, ou seja, os alunos justificavam suas respostas após uma série de experimentações.

Outra parte dos alunos pesquisados após tais experimentações utilizava-se de prova por enunciados, priorizando, assim, junto à linguagem numérica, a linguagem natural. No entanto, poucos que tentaram valer-se da linguagem algébrica encontraram dificuldade em validá-la, mostrando as dificuldades que os alunos possuem em utilizar esta linguagem.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) fazem uma separação entre as concepções da álgebra e as da educação algébrica, quando se referem à álgebra. Os autores destacam quatro concepções: a primeira concepção seria processológica, que enxerga a álgebra como uma série de procedimentos com o objetivo de resolver determinado problema. De acordo com os autores, esta concepção não exige a necessidade de um pensamento algébrico.

A segunda concepção é denominada de linguístico-estilística. Ela trata a álgebra como uma linguagem que tem por objetivo expressar os procedimentos, reconhecendo que a linguagem natural é insuficiente para tal expressão.

A terceira concepção é a linguístico-sintático-semântica. Ela reconhece a linguagem algébrica como sendo mais rigorosa que a concepção anterior, pois para esta a simples necessidade de uma linguagem específica não justifica a existência de um pensamento algébrico, mas sim a consciência de que, para adquirir operacionalidade, deve-se atingir o *status* e o estágio mais elevado de uma linguagem verdadeiramente simbólica, fazendo a distinção entre o uso da letra para representar quantidades discretas e contínuas e o uso da letra para representar quantidades genéricas. Assim, ganha-se a capacidade de efetuar e expressar operações estritamente simbólicas.

A quarta concepção, linguístico-postulacional, reconhece a álgebra como uma linguagem simbólica, como a concepção anterior, mas amplia o alcance da álgebra a todos os campos da matemática. Neste caso, a álgebra é vista como recurso para outros campos, como a geometria, a estatística, a probabilidade, entre outros.

O autor, para cada uma das concepções explicadas anteriormente, aponta possíveis concepções de educação algébrica tratadas ao longo da história. A primeira, denominada de linguístico-pragmática, é o entendimento mecânico dos procedimentos do chamado transformismo algébrico que seria necessário para a resolução de problemas, com ênfase em realizar os procedimentos sem se preocupar com o entendimento deles.

A segunda concepção é implementada pelo movimento da matemática moderna e é a fundamentalista-estrutural; baseada na quarta concepção sobre a álgebra, ela enxerga a álgebra como fundamento para outros campos da matemática escolar, estendendo o transformismo algébrico ao entendimento das propriedades que justifiquem a transformação, sendo isso o suficiente para que o aluno aplicasse a álgebra em diversos contextos.

A terceira e última concepção, intitulada fundamentalista-analógica, é uma síntese das concepções já abordadas, pois, enquanto eleva o valor instrumental da álgebra, mantém o caráter fundamentalista, não somente na ideia de entender as propriedades, mas de uma forma mais visual, socorrendo-se da geometria e de materiais concretos para o entendimento da álgebra, não descaracterizando o caráter abstrato da álgebra como estágio de aprendizagem.

Após entender estas concepções, e defender a terceira concepção, uma vez que esta nos traz uma ideia mais ampla da álgebra utilizada em diversos contextos dentro da própria matemática e fora dela e principalmente conferindo significado, e sem descaracterizar seu caráter abstrato procura apresentar o ensino da álgebra de forma mais concreta. É importante lembrar que a álgebra é uma das divisões da matemática e o entendimento de suas bases se faz necessário para o entendimento matemático.

A Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017), quando trata do ensino da álgebra, destaca um tipo especial de pensamento que se denomina de pensamento algébrico. Este assunto será aprofundado no próximo capítulo. O caráter abstrato da álgebra, embora gere diversas dificuldades aos alunos, é uma fonte preciosa, pois exige do aluno o exercício da capacidade de pensar, que, segundo Juan Delval, é inerente ao ser humano e deve ser potencializado pela escola (DELVAL, 1998).

Jean Piaget, em seus estudos sobre as fases do desenvolvimento humano, destaca como a quarta fase aquela que se inicia aproximadamente aos 11 anos e vai até a vida a adulta, isto é, a fase da inteligência formal, na qual o adolescente constrói sistemas e teorias, demonstrando facilidade em elaborar teorias abstratas. Em que pese o momento propício, este esforço envolve dificuldades, uma vez que o adolescente necessita tirar conclusões de hipóteses, sem a observação real, tornando o trabalho mais árduo (PIAGET, 1997, p. 59).

Analisando a posição dos autores citados, permitir com que os alunos busquem suas próprias conclusões a partir de observações e experimentações pode ser um facilitador da aprendizagem, o que viabiliza ao aluno a aquisição de uma posição crítica.

Podemos pensar, por exemplo, na pesquisa realizada por Freitas (2003), ao sugerir aos alunos uma proposta-problema para a qual não havia uma resposta numérica, mas na qual eles precisavam, a partir de experimentações e observação, explicar o motivo pelo qual os exercícios não tinham uma solução. Neste processo, o aluno exercita uma atitude investigativa, priorizando a capacidade de pensar.

Neste sentido, permitindo ao aluno que exerça atitudes de investigação, temos que:

> o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

No entanto, no que diz respeito ao ensino da álgebra, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 85) alertam sobre um aspecto didaticamente negativo, que é a redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica. Os autores sustentam que "de fato, todas estas concepções de Educação Algébrica tomam como ponto de partida a existência de uma álgebra simbólica já constituída. Em todos os casos, o ensino-aprendizagem da Álgebra reduz-se ao 'transformismo algébrico'" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 85).

Os autores deixam claro que tratar a álgebra apenas como um conjunto de regras que servirão de auxílio para a resolução de um problema é uma situação didaticamente negativa. Isso porque, dessa forma, os alunos acabam perdendo sua autonomia que poderiam aprimorar por meio de um pensamento algébrico e se restringem tão somente à resolução de problemas de forma mecanizada, deixando de atuar como matemáticos e passando a ser meros repetidores.

Outro fator que devemos considerar e que dificulta ainda mais a aprendizagem da álgebra trata-se da dificuldade dos alunos de, até mesmo, entender a álgebra nesta concepção (transformista). Este fato ocorre principalmente por causa da maneira como a álgebra é concebida ao longo dos anos e também pelas mudanças atuais na sociedade, uma vez que os alunos são expostos a uma grande gama de informação, muitas vezes, sem qualquer cunho educacional, alterando-se de certa forma sua percepção do mundo.

Desse modo, os alunos tornam-se muitas vezes alheios ao que acontece no mundo propriamente dito. Por este motivo, priorizar o pensamento algébrico é fundamental, ficando claro que o mesmo não pressupõe o entendimento da linguagem algébrica, muito pelo contrário.

> A tendência da Educação Algébrica tem sido acreditar que o pensamento algébrico só se manifesta e desenvolve através da manipulação sintática da linguagem concisa e específica da Álgebra. Entretanto, essa relação de subordinação do pensamento algébrico à linguagem desconsidera o fato de que, tanto no plano histórico quanto no pedagógico, a linguagem é, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 85).

O autor deixa clara a importância do pensamento algébrico, que pode ser materializado por meio de atitudes investigativas por parte dos alunos, os quais, por sua vez, precisam ser instigados pelo professor, permitindo que o aluno exercite sua curiosidade e promova sua autonomia, favorecendo assim o processo de ensino e aprendizagem. O ensino da álgebra não pode se resumir a decorar conceitos e realizar procedimentos de forma mecânica; a linguagem algébrica deve ser produzida e entendida a partir do pensamento, conforme citado acima.

Quando o aluno se propõe a resolver um problema investigando as diversas possibilidades, acaba exposto a um grande universo de conhecimento que favorece sua aprendizagem. Neste sentido, Braumann (2002) coloca que, para aprender matemática, é necessária a capacidade de investigação de natureza matemática, fazendo com que a relação entre a matemática, a compreensão e a intervenção a respeito do mundo fique clara. Reiteramos aqui a conexão entre a investigação matemática e a capacidade de pensar do aluno, gerando um pensamento algébrico, o que possibilita um entendimento autônomo de mundo e grandes possibilidades de aprendizagem.

Pode-se dizer que permitir o desenvolvimento no aluno de um pensamento algébrico, embora não seja algo trivial, é algo que se faz necessário. Neste contexto, torna-se evidente que os professores precisam propiciar situações as quais promovam este pensamento. Pode-se, por exemplo, instigar uma atitude investigativa, não somente quando a álgebra é inserida no currículo escolar, mas também desde os primeiros passos dos alunos na matemática.

O mais preocupante, contudo, é constatar que a escola se encontra bastante sobrecarregada com os desafios do mundo contemporâneo, a ponto de negligenciar a sua real função. Conforme afirma Nóvoa (2007, p. 6), "(...) os conhecimentos, é preciso reconhecer, durante algum tempo foram uma espécie de paradigma ausente de muitas práticas pedagógicas". Não é exagero afirmar que a escola tem perdido sua função, motivo pelo qual é importante que os professores reassumam suas posições a favor do conhecimento e facilitem a aprendizagem.

Desta forma, promover no aluno o pensamento algébrico por meio de atitudes investigativas é também proporcionar o conhecimento poderoso citado por Young.

> Dessa maneira, a tarefa do professor, na construção do currículo escolar, é permitir que os alunos se envolvam com o currículo e avancem para além da sua experiência. Por isso, é tão importante que os professores entendam a diferença entre currículo e pedagogia – ou as atividades e as concepções dos professores (YOUNG, 2016, p. 13).

A álgebra, portanto, é uma área da matemática que depende de conceitos e ideias da aritmética. Assim, os primeiros passos para que seja propiciada a construção de um pensamento algébrico deve se iniciar ainda no Ensino Fundamental, nos anos iniciais, com o que podemos chamar de pré-álgebra, que na verdade são os conceitos aritméticos consolidados. Quando, por exemplo, expomos a criança a problemas do tipo 2 + ? = 5, iniciamos na criança a possibilidade de pensar algebricamente sem procedimentos formais, mas se utilizando de raciocínio lógico, necessário para a construção do pensamento algébrico, no próximo capítulo, iremos observar a forma como a álgebra é tratada nos documentos oficiais, em especial nos PCN (Brasil, 1997) de matemática e na BNCC (Brasil, 2017).

4 A ÁLGEBRA NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Neste capítulo, temos por objetivo analisar como a álgebra vem sendo apresentada, a partir da década 80, nos currículos escolares e como é vista nos documentos oficiais, em especial, na Lei de Diretrizes e Bases (LDB) e na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2017).

É importante relembrar que a Constituição Federal, em seu artigo 205, estipulou a educação como um direito de todos, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, ao preparo para exercer a cidadania e à qualificação para o mercado de trabalho (BRASIL, 1988). Quando a Constituição propõe que a educação deve preparar a pessoa para o exercício da cidadania, pressupõe-se a prática de autonomia, uma vez que uma pessoa cidadã é aquela que conhece seus direitos e deveres e os cumpre, possuindo assim uma posição crítica e autônoma.

A primeira Constituição a tratar do assunto da educação foi a de 1934 e a primeira lei reguladora foi a Lei n. 4.024 de 20 de dezembro de 1961. Nela, podemos encontrar como fins da educação o desenvolvimento integral da personalidade humana e sua participação na obra do bem comum, assim como o preparo do indivíduo e da sociedade para o domínio de recursos científicos e tecnológicos que permitam utilizar possibilidades e vencer as dificuldades do meio (BRASIL, 1961).

Conforme explicado acima, percebemos que, desde a primeira lei a qual regula a educação, a maior preocupação reside em propiciar condições para o pleno desenvolvimento da pessoa. Atualmente, a lei que regula a educação é a Lei n. 9.394 de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação), cujo artigo segundo possui dizeres semelhantes aos já citados. Ambas as leis citadas são genéricas e tratam muito mais de questões administrativas do que pedagógicas.

As questões específicas de cada disciplina são tratadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais. O que passaremos a observar nos parâmetros da matemática é como é tratada a álgebra.

4.1 Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que vigoram desde 1997 e funcionam como diretrizes para a regulação dos currículos, são divididos por disciplina. Os PCN ressaltam a importância da visão do estudante em relação à disciplina, como sendo algo que possa lhe ajudar no desenvolvimento do raciocínio, expressão e imaginação. Ademais, é objetivo da disciplina segundo o PCN que os alunos possam se posicionar de maneira crítica e construtiva nas diferentes situações sociais, além de destacar a utilização de diversas linguagens, entre elas, a matemática, para que possam expressar e comunicar suas ideias. O documento ainda destaca o papel social da matemática, que vai muito além da decoreba de fórmulas e da realização de operações repetitivas (BRASIL, 1996). Torna-se clara a consonância de propostas entre a LDB e o Parâmetro Nacional de Matemática. Cabe agora entender um pouco como a matemática veio se desenvolvendo nos currículos brasileiros.

A discussão sobre a história da matemática nos currículos brasileiros não possui um início muito propício, uma vez que é marcado pelos altos índices de retenção e pela preocupação em relação à mecanização e treino das habilidades. No entanto, com o advento da matemática moderna, que procurava aproximar a matemática aprendida na escola àquela estudada pelos pesquisadores, passou-se a dividi-la em estruturas de estudo, gerando reformas, o que futuramente se tornaria um problema, já que o estudo neste nível estava fora da realidade dos alunos, tornando seu estudo bem complexo.

Percebida tal distorção, a partir dos anos 80, o foco foi mudado para a resolução de problemas e surgiu uma preocupação com outros aspectos, como o social e o cognitivo. Este novo movimento influenciou, no sentido de priorizar a aquisição de competências, a ênfase no papel do aluno e na sua construção de conhecimento.

Outro recurso que ganhou destaque foi a resolução de problemas relacionados ao cotidiano, já nos anos iniciais, quando se começa a trabalhar, mesmo que de forma simples, diversas áreas da matemática. Assim, a atenção antes somente destinada à aritmética foi desviada. Foi nesta época que a álgebra ganhou grande destaque.

As influências da matemática moderna extrapolavam os currículos brasileiros. Podemos perceber, por exemplo, que em Portugal ocorria o mesmo, quando:

“contestavam-se os programas marcados pela matemática moderna em que se sobrevalorizavam a lógica e as estruturas abstractas da álgebra e em que se reduzia a Geometria” (BROCARDO *et al*., 2006).

Este incômodo também gerou uma reforma em Portugal no início dos anos 90, privilegiando a resolução de problemas e o uso da calculadora, computadores e materiais manipuláveis. Na ocasião, notou-se outra questão: os professores não colocavam em prática os direcionamentos dados, o que motivou outra reforma, a qual ocorreu em meados de 1996, quando os professores foram consultados acerca do currículo a ser implementado. Em 2001, tal situação acarretou a publicação do documento Currículo Nacional da Educação Básica: Competências Essenciais. No que diz respeito à matemática, em sua introdução é afirmado o seguinte:

> A matemática constitui um patrimônio cultural da humanidade e um modo de pensar. A sua apropriação é um direito de todos. Todas as crianças e jovens devem ter a possibilidade de: desenvolver a capacidade de usar a matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar, assim como a autoconfiança necessária para fazê-lo. (BRASIL, 2001, p. 57).

Ainda ao definir a ênfase da matemática, é esclarecido que “a ênfase da Matemática escolar não está na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas” (op. cit., p. 58), mas justamente nessa capacidade de resolver situações-problema e de se expressar.

Observa-se que caminho semelhante ocorreu no Brasil, mas antes de abordar como ocorreu a construção da Base Nacional Comum Curricular, retornemos aos Parâmetros Nacionais, para entender como a álgebra é tratada neste documento.

Os objetivos definidos nos antigos parâmetros de matemática para o que na época era chamado de terceiro ciclo era o desenvolvimento dos pensamentos numéricos, algébricos e geométricos. Além disso, eram tratados a competência métrica, o raciocínio relacionado à proporcionalidade e o raciocínio combinatório.

O documento estabelece que, no decorrer dos trabalhos com os números, o aluno precisa ter os primeiros contatos com a álgebra, mesmo que ainda não se utilize de convenções.

E na sequência propõe que o ensino da álgebra venha acompanhado de recursos como jogos, gráficos e modelos, evitando procedimentos puramente mecânicos. Assim, é enfatizado o trabalho com problemas e o aluno é estimulado a dar significado às ideias e à linguagem matemática.

Neste sentido, o ensino da álgebra deveria privilegiar:

> (...) a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da sintaxe (regras para resolução) de uma equação. Para apoiar a compreensão desses conceitos, pode-se lançar mão da construção e interpretação de planilhas, utilizando recursos tecnológicos como a calculadora e o computador (BRASIL, 1997, p. 84).

Não restam dúvidas quanto à importância da educação algébrica, bem como se percebe claramente esta preocupação desde os Parâmetros Curriculares de Matemática, editados em 1997. Assim, há mais de 20 anos, na ocasião o documento estabelecia considerações importantes acerca do ensino da álgebra, destacando-a como espaço significativo para que o aluno exercite sua capacidade de abstrair e generalizar.

No entanto, já se apontavam problemas, como o excesso da mecanização, ou até mesmo, na intenção de torná-la mais significativa, a antecipação de situações que estavam somente previstas para o Ensino Médio, o que não é recomendado, sendo mais proveitoso a aprendizagem se esta ocorrer por meio da observação de regularidades em tabelas e gráficos, verificando relações. “Existe um razoável consenso de que para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra” (BRASIL, 1997, p. 116).

É importante salientar que, mesmo após 20 anos da sua publicação, os problemas levantados pelos PCNs aparentam permanecer nos bancos escolares. Contudo, convém citar que os Parâmetros Curriculares, embora ainda possam ser considerados preciosas fontes de consulta, atualmente deixaram de ser considerados como tal. O seu substituto é a Nova Base Comum Curricular (BNCC), a qual vem sendo discutida nos últimos anos e acaba de ser publicada em sua versão final. Passemos então ao estudo da mesma.

4.2 Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que foi construído com a participação da sociedade e dos profissionais de ensino. Depois da realização de audiências públicas, após passar por três versões, chegou-se à versão final, homologada recentemente.

Ela tem por principal objetivo nortear a elaboração dos currículos dos estados e municípios, a fim de que todo o território nacional tenha uma educação isonômica. A base está fundamentada em dez competências gerais, objetivo de todo o ensino escolar fundamental. No que diz respeito à competência, ela é “definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores”, de modo a “resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2016, p. 8).

Podemos perceber a relação entre a definição da base e os fins da educação discutidos desde a primeira LDB até a legislação mais recente. Entre as dez competências, podemos fazer algumas observações.

A primeira competência diz respeito à visão de mundo do aluno, baseando-se em sua aprendizagem, a fim de construir uma sociedade justa, democrática e inclusiva. Assim, o aluno não deve ser somente coadjuvante, mas protagonista de sua aprendizagem, sendo influenciador.

A segunda competência merece destaque especial, uma vez que está diretamente relacionada ao presente trabalho. Então, vejamos.

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2016, p. 9).

Aqui tratamos do aluno crítico, aquele que investiga e chega às suas conclusões, exerce autonomia e utiliza-se da criatividade para solucionar questões e propor novos problemas a serem solucionados. É importante tratar deste assunto, haja vista a experiência que vemos atualmente dentro das escolas, isto é, uma apatia por parte dos estudantes, o que faz deles meros reprodutores de informações e não produtores de conhecimento. Reforçamos aqui as ideias de Delval e Piaget sobre a capacidade de pensamento do adolescente.

A terceira competência a ser desenvolvida dá destaque às produções artísticas e culturais, locais e mundiais. A quarta salienta a utilização de diversas linguagens, entre elas, a linguagem matemática, com o objetivo de partilhar informações, experiências e ideias, produzindo entendimento. Cabe evidenciar a importância e a existência de diversas linguagens matemáticas; em especial, gostaria de frisar a linguagem algébrica, que, uma vez entendida, pode ser facilitadora para a aquisição desta competência.

A quinta competência trata da utilização e criação de tecnologias digitais, de forma crítica e reflexiva. A sexta busca a valorização dos saberes e vivências culturais, relacionando-os com o mundo do trabalho e seu projeto de vida. A sétima competência faz referência à argumentação em fatos e dados. A oitava é referente à saúde física e socioemocional. A nona, ao exercício da empatia, diálogo e resolução de conflitos e, por fim, a décima competência aponta para a importância do cidadão autônomo e ético. É importante salientar que foi conferido maior destaque às competências gerais previstas na BNCC que se conectam diretamente com o presente trabalho.

Passemos a observar o que a BNCC apresenta a respeito da disciplina matemática especificamente, trabalhando a ideia de dez competências relativas à matemática, abordando: conhecimento; pensamento científico, crítico e criativo; repertório cultural; comunicação; argumentação; cultura digital; autogestão; autoconhecimento e autocuidado; empatia e cooperação; autonomia e responsabilidade. É relevante também mais uma vez enfatizar o item relacionado ao pensamento científico, crítico e criativo, momento em que o adolescente é convidado a investigar causas, criar hipóteses, formular e resolver problemas e propor soluções. Ao tratar da álgebra, o destaque para o desenvolvimento de um pensamento especial, entendido aqui como o pensamento algébrico, resulta na necessidade de que os alunos identifiquem regularidades, estabeleçam leis e saibam interpretar diversas situações gráficas e simbólicas.

O documento traz ainda algumas dimensões que devem ser levadas em consideração no ensino da álgebra, desde os anos iniciais. São mencionadas ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. De fato, é importante que, desde os primeiros passos na matemática, os alunos já se vejam em contato com conceitos algébricos, ainda que sem o uso de letras.

> A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação (BRASIL, 2016, p. 268).

A título de exemplo, o documento ainda destaca a relação de igualdade como deve ser apresentada aos alunos. Por exemplo, “a relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se 2 + 3 = 5 e 5 = 4 + 1, então 2 + 3 = 4 + 1” (BRASIL, 2016, p. 268). Outros exemplos são citados pelo documento, mostrando que a álgebra deve ser privilegiada desde os anos iniciais, com a busca de regularidades e relações de equivalência e de proporcionalidade, por exemplo.

Nos anos finais, deve-se aprimorar a ideia de aprofundar e sistematizar os conceitos aprendidos, estabelecendo conexões. Compactuo da ideia de que, se a álgebra for trabalhada desde o primeiro ano do Ensino Fundamental, as dificuldades dos alunos quando atingirem os anos finais serão menores. A proposta é clara neste sentido e prevê grandes avanços, mas evidentemente alguns obstáculos precisam ser superados.

A seguir, destaco o que a Base Nacional Comum Curricular define como competências a serem trabalhadas no campo da álgebra.

> 1º ano
>
> (EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
>
> (EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras (BRASIL, 2016, p. 277).
>
> 2º ano
>
> (EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
>
> (EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.

> (EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras (BRASIL, 2016, p. 281).
>
> 3º ano
> (EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número; descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
>
> (EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença (BRASIL, 2016, p. 285).
>
> 4º ano
>
> (EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
>
> (EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.
>
> (EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.
>
> (EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.
>
> (EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais (BRASIL, 2016, p. 289).
>
> 5º ano
>
> (EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.
>
> (EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
>
> (EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.
>
> (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo (BRASIL, 2016, p. 293).

Segundo seus idealizadores, se todas as habilidades acima forem trabalhadas nos anos iniciais, os alunos chegariam preparados para os devidos avanços aos anos finais, ainda mais se tais habilidades, ao serem propostas, levarem em consideração atitudes investigativas dos alunos. Assim, desde pequenos, passariam a desenvolver um pensamento crítico e algébrico.

4.3 Álgebra no currículo escolar

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) visam oferecer padrões de ensino a serem seguidos, padrões estes que são considerados como a melhor forma de transmitir conteúdo para os alunos. Assim, define-se uma nova forma de transmitir os conteúdos e educar os alunos nesse período do colegial, deixando de ser apenas um simples estágio introdutório.

Pode-se dizer que os PCN não se limitam apenas à transmissão de conteúdo para os alunos, mas sim, dizem respeito à formação do cidadão. Neste processo, o professor é concebido como um educador, que mais do que ensinar as teorias em sala de aula deve visar ao aluno como um todo, como um cidadão de direitos em formação. Acredita-se ser fundamental, para tanto, que o professor se utilize de metodologias capazes de chamar o aluno para o aprendizado, isto é, levantar seu interesse para o conteúdo que está sendo tratado, para a disciplina (BRASIL, 1997).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) foram criados para que as diretrizes da LDB (Lei de Diretrizes e Bases) pudessem ser implementadas, visando orientar escolas e professores acerca do ensino e aprendizagem em suas áreas de domínio. Pode-se perceber nos trechos citados dos PCN que há uma posição contrária aos modelos tradicionais de ensino, propondo um ensino sintonizado com as diretrizes propostas pela LDB, dando ênfase para a necessidade de se trabalhar a interdisciplinaridade e o relacionamento entre ensino, ciência e tecnologia, tendo a competência como um dos conceitos centrais (op. cit.).

Nesse contexto, os PCN têm como principal objetivo dar diretrizes a serem seguidas pelas escolas para que seus alunos desenvolvam competências, promovendo uma visão holística do aluno enquanto cidadão e não apenas como estudante. Neste sentido, a matemática está incluída na área de ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, sendo considerada sua aprendizagem fundamental para o desenvolvimento da condição de cidadania do aluno.

O ensino da álgebra se caracteriza pela possibilidade de fazer com que o aluno desenvolva sua capacidade de abstração e generalização, todavia, na maioria das vezes se caracteriza como uma disciplina mecanizada e sem importância para o mundo fora da escola. Campos Lins elucida que há:

> um grande estranhamento entre a matemática da escola, dita oficial e a matemática da rua, da vida real, o que justifica o fracasso de tantos em relação à matemática escolar, não por não conseguirem aprender, mas por apresentarem como que um sintoma de recusa em se aproximar das coisas estranhas da sala de aula (LINS, 2004, p. 109).

Deste modo, o ensino da álgebra acaba sendo entendido como um mero cálculo com letras, fazendo com que o processo de ensino e aprendizagem não tenha resultados positivos.

Considera-se, pois, importante que os professores utilizem materiais pedagógicos os quais pontuem a álgebra nessa sequência – definição, exemplos, exercícios. Nas palavras de Jurjo Torres Santomé:

> Em muitas ocasiões, os conteúdos são contemplados pelo alunado como fórmulas vazias, sem sequer a compreensão de seu sentido. Ao mesmo tempo, criou-se uma tradição na qual os conteúdos apresentados nos livros didáticos aparecem como os únicos possíveis, os únicos pensáveis (SANTOMÉ, 2002, p. 161).

Por isso, o estudo da álgebra acaba se tornando rotinizado, fazendo com que os alunos não tenham sucesso no aprendizado. O fato é que a construção da linguagem algébrica não tem relação com o cotidiano dos alunos e se limita à prática de resolver problemas e cálculos mecanizados.

Entende-se que para modificar esta realidade, faz-se necessário que se adote no currículo escolar de álgebra conteúdos com enfoque social, direcionados para a vivência do aluno, não se deixando de reconhecer a importância do ensino de técnicas, regras e símbolos algébricos, já que estes são fundamentais para a construção do conhecimento matemático.

5 O MÉTODO E OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste tópico, apresentamos o método de pesquisa utilizado, os procedimentos metodológicos adotados e o contexto da pesquisa.

5.1 Caracterização da pesquisa

Para a realização da pesquisa, foi adotada a abordagem qualitativa. Segundo Marconi e Lakatos (2010), a abordagem qualitativa tem como premissa analisar e interpretar aspectos mais subjetivos, descrevendo a complexidade do comportamento humano e ainda fornecendo análises mais detalhadas sobre as investigações, atitudes e tendências de comportamento. Já a abordagem quantitativa, segundo Diehl (2004), pela quantificação, tanto na coleta quanto no tratamento das informações, utiliza-se de técnicas estatísticas, as quais objetivam resultados que evitem possíveis distorções de análise e interpretação, o que possibilita uma maior margem de segurança.

Quanto aos objetivos, esta pesquisa enquadra-se como pesquisa descritiva e exploratória. Conforme Triviños (1987, p. 110) a “(...) pesquisa descritiva exige do investigador uma série de informações sobre o que deseja pesquisar. Esse tipo de estudo pretende descrever os fatos e fenômenos de determinada realidade”. Segundo Gil (2002), podemos classificar as pesquisas como sendo: exploratórias, descritivas e explicativas. A pesquisa exploratória possui como objetivo obter maior conhecimento do problema, tornando-o mais claro, e aprimorando assim as ideias. Já a pesquisa descritiva é aquela que objetiva a descrição de alguma característica ou fenômeno; é uma espécie de classificação mista, a qual em alguns casos se assemelha à exploratória e, em outros, à explicativa. A pesquisa explicativa é aquela que está preocupada com os fatores determinantes de um fenômeno, e tem o cunho de explicar a causa do mesmo.

A presente pesquisa pode ser classificada como exploratória do tipo intervencionista, apresentando como objetivo a inovação e a mudança (DAMIANI, 2012). Para melhor entender a pesquisa intervencionista, é relevante uma pequena discussão da abordagem histórico-cultural.

5.1.1 Abordagem histórico-cultural

Freitas (2009), tendo como plano de fundo as obras de Vygotsky e Bakhtin, esclarece inicialmente que fazer pesquisa qualitativa na perspectiva histórico-cultural consiste em ir além da descrição da realidade, havendo assim a necessidade de explicá-la.

Vygotsky (1991), ao discutir problemas de método, percebe a necessidade de considerar o histórico geral da espécie humana. Para o estudioso, o comportamento do homem é bem diferente do comportamento animal. Dessa forma, existe a necessidade de discutir uma nova abordagem científica, o que, segundo ele, levaria inevitavelmente a novos métodos de investigação. Seus estudos têm como núcleo os achados de Engels, ao contrastar as abordagens naturalística e dialética. A primeira afirma que somente a natureza exerce influência sobre o homem, sendo diretamente responsável pelo desenvolvimento histórico, enquanto a segunda destaca que, além de a natureza exercer influência sobre o homem, este também exerce influência sobre a natureza, transformando-a. Assim, é reconhecido que, para estudar algo historicamente, significa estudá-lo no processo de mudança.

Freitas (2009) ainda faz referência a Bakhtin, filósofo cujos escritos têm por tema central o dialogismo. Ela assinala que o objeto das ciências humanas é o ser expressivo e falante. Assim, para a autora, Bakhtin deixa clara a importância do outro sujeito, aquele objeto de pesquisa o qual possui voz, interage e assim faz parte do processo de transformação. Neste sentido,

> o pesquisador tem possibilidades de aprender, transformar-se e se ressignificar durante o processo de pesquisa. O mesmo acontece com o pesquisado, que, não sendo coisa, mas sujeito, tem também oportunidade de refletir, aprender e se transformar no transcorrer da pesquisa (FREITAS, 2009, p. 5).

Para a autora, as ideias citadas conduzem à palavra intervenção, a qual, na perspectiva histórico-cultural, não tem o sentido autoritário que a palavra possui em sua essência, mas sim o sentido de intervir para transformar. Desse modo, a pesquisa está centrada na relação entre os sujeitos, com o objetivo claro de provocar transformações nos sujeitos da pesquisa.

Pensando no referencial teórico e nos estudos até aqui realizados para esta pesquisa, é inegável que o ensino da álgebra passa por esta relação entre sujeitos, uma vez que a função do professor é a de ser mediador entre o conhecimento e o pensamento do aluno, o qual deve exercer sua autonomia. Assim, o aluno deve ter oportunidade de falar, criar hipóteses, investigá-las.

Por sua vez, o professor necessita proporcionar este momento ao aluno, propondo atividades que favoreçam a atitude investigativa. Esta relação é transformadora para os sujeitos desta relação: para o aluno, que tem a oportunidade de exercer o protagonismo de sua aprendizagem; e para o professor, o qual, ao realizar as propostas, replanejando-as sempre que necessário, de acordo com as necessidades do aluno, também aprende. Por este motivo, entendemos que o método qualitativo na modalidade de pesquisa da intervenção pedagógica é a melhor escolha para atender as necessidades da pesquisa.

5.1.2 Pesquisa do tipo intervenção pedagógica

Sobre este tipo de pesquisa, Damiani (2012) destaca suas características como sendo pesquisas aplicadas, com a intenção de mudança e inovação. Assim, trabalha-se com dados criados, que envolvem uma avaliação rigorosa e sistematizada da prática.

Lima e Nacarato (2009), ao fazerem um recorte sobre sua Dissertação de Mestrado, indagam acerca das razões que possam justificar a pesquisa sobre a própria prática. As autoras propõem alguns motivos, tais como: a possibilidade de o professor assumir-se como protagonista no desenvolvimento do currículo, agindo como transformador da cultura escolar, potencializando seu desenvolvimento profissional. Assim, são fornecidos elementos para o melhor entendimento dos problemas educacionais. As autoras ainda discutem o papel do professor na atual conjectura escolar, uma vez que, com o desenvolvimento da tecnologia e da sociedade, o professor tem cada vez mais de buscar formas alternativas para atender as demandas.

Damiani (2012) ainda destaca que a pesquisa do tipo intervenção pedagógica, para ter *status* científico, precisa ser dividida em duas etapas: método da intervenção e o método de avaliação da intervenção. A primeira etapa trata-se do planejamento e aplicação da intervenção pedagógica, em que o foco deve ser a atuação como professor e não como pesquisador, enquanto na segunda o olhar deve ser voltado para a atuação de pesquisador, descrevendo o método com rigor exigido pela pesquisa.

No que se refere à primeira etapa,

> o método da intervenção deve ser descrito pormenorizadamente, explicitando seu embasamento teórico. No caso de uma intervenção em sala de aula, por exemplo, a descrição deve abordar o método de ensino aplicado, justificando a adoção das diferentes práticas específicas planejadas e implementadas (DAMIANI, 2012, p. 62).

Os relatórios que serão elaborados no decorrer da pesquisa nesta primeira etapa devem ter a preocupação e o olhar do professor e não do pesquisador. Isso se encaixa também na linguagem, e isso se justifica diante do caráter prático da intervenção, que pode ser replicada por outros professores não pesquisadores. O caminho da intervenção passamos a descrever a seguir, sempre com a preocupação já exposta e, quando da elaboração dos relatórios, procuraremos relatar como as etapas propostas transcorreram e o embasamento teórico que lhes dá suporte.

Em relação ao método de avaliação da intervenção,

> o método de avaliação da intervenção tem o objetivo de descrever os instrumentos de coleta e análise de dados utilizados para capturar os efeitos da intervenção. Aqui, o pesquisador deve apresentar esses instrumentos justificando seu uso a partir de ideias provenientes da teoria metodológica (op. cit.).

Ao tratar desta segunda etapa, a autora a divide em outras duas, que são os achados relativos aos participantes da intervenção. No caso, seria uma análise da mudança apresentada pelos participantes, à luz do referencial teórico, e os achados relativos à intervenção propriamente dita, discutindo pontos fracos e fortes da intervenção e as modificações realizadas ao longo do percurso, a partir das reflexões realizadas.

Cabe neste momento descrever o caminho que pretendemos seguir durante a intervenção, traçando estratégias e planejando atividades que permitam com que os alunos se sintam desafiados, instigados, curiosos e que demonstrem interesse pelo aprendizado, fazendo com que eles assumam uma atitude investigativa.

Também é fator a considerar qual é o tipo de pensamento que o aluno consegue desenvolver na busca pela resolução de situações-problema, como este pensamento se desenvolveu ao longo do percurso escolar e quais são as dificuldades apresentadas. Com isso, será possível identificar de quais estratégias os professores poderiam lançar mão, a fim de minimizar tais lacunas e permitir ao aluno um conhecimento algébrico introdutório que propicie continuidade com excelência.

5.2 Riscos e benefícios

Toda pesquisa científica apresenta riscos mínimos ou não apresenta riscos previsíveis. Porém, segundo a Resolução nº 466/201,2 toda pesquisa que envolve seres humanos, direta ou indiretamente, apresenta riscos em tipos e gradações variados (BRASIL, 2012). Vejamos abaixo o que dispõe a Resolução em seu inciso V:

> Toda pesquisa com seres humanos envolve risco em tipos e gradações variados. Quanto maiores e mais evidentes os riscos, maiores devem ser os cuidados para minimizá-los e a proteção oferecida pelo Sistema CEP/CONEP aos participantes. Devem ser analisadas possibilidades de danos imediatos ou posteriores, no plano individual ou coletivo (BRASIL, 2012, p. 7).

Dessa forma, esta pesquisa apresenta riscos mínimos, devido ao fato de os instrumentos de coleta de dados estarem diretamente relacionados às falas e às produções dos alunos, em que há o possível risco de constrangimento por parte das pessoas pesquisadas. Caso ocorra qualquer incômodo ou dano, o pesquisador respeitará os preceitos éticos, determinados pela Resolução nº 466/2012, e deixará o respondente à vontade para não responder às perguntas que eventualmente causarem qualquer constrangimento ou sair da pesquisa sem que haja nenhum tipo de prejuízo.

Cabe esclarecer que a coleta de dados foi realizada com a gravação do áudio da aula, posteriormente foram feitos recortes relevantes ao estudo, estes foram transcritos na presente pesquisa, bem como as produções dos alunos.

5.3 Do método da intervenção: etapas da pesquisa

O objetivo deste item é descrever as etapas a serem realizadas na pesquisa, iniciando por uma avaliação diagnóstica que irá subsidiar os conceitos e habilidades a serem trabalhados na intervenção, após a intervenção propriamente dita e por fim a avaliação da intervenção.

5.3.1 1ª etapa: avaliação diagnóstica

A primeira etapa realizada foi a avaliação diagnóstica a todos da classe pesquisada, de modo a perceber indícios do desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno, utilizando para isso uma das divisões históricas da álgebra discutida por Boyer (1974) e Fiorentini, Miorim e Miguel (1993). Esta classificação a divide em estágios primitivo, sincopado e simbólico, estipulando uma relação com Freitas (2003) e associando-a às linguagens natural, numérica e algébrica. Assim, o objetivo da referida avaliação seria analisar a linguagem utilizada pelos alunos na resolução dos exercícios.

5.3.2 2ª etapa: intervenção propriamente dita

A partir dos resultados tabulados na avaliação diagnóstica, a intervenção foi planejada e aplicada. O objetivo desta etapa consiste em permitir ao aluno o desenvolvimento do pensamento algébrico. Entendemos que este pensamento deve ser aperfeiçoado ao longo das etapas escolares anteriores. No entanto, a percepção que temos em sala de aula é a de que ele pouco aparece nas falas dos alunos, o que poderá ser constatado na avaliação diagnóstica. Para tal, serão utilizadas aproximadamente seis aulas, priorizando o estudo de regularidades e de conceitos aritméticos que se relacionam com a álgebra, como, por exemplo, as propriedades das operações, utilizando recursos tecnológicos, e o trabalho colaborativo, bem como a introdução à álgebra.

5.3.3 3ª etapa: avaliação da intervenção

Nesta última etapa, o objetivo foi avaliar o conhecimento adquirido pelo aluno após todas as etapas anteriores, traçando um paralelo com o teste inicial. Procuramos descrever também os achados relativos à avaliação dos efeitos da intervenção pedagógica e identificamos o que favoreceu as aprendizagens dos alunos, no que diz respeito ao processo de aprendizagem, se houve ou não facilidade no processo, levantando a percepção do aluno e observando os instrumentos de avaliação, bem como os achados relativos à intervenção propriamente dita, cujo objetivo foi analisar e avaliar a intervenção, discutindo os pontos fracos e fortes, e as modificações realizadas durante o processo a partir de observações e reflexões.

A pesquisa foi realizada em uma escola municipal localizada no litoral de São Paulo em uma sala de sétimo ano, com aproximadamente 30 alunos.

5.4 Caracterização do contexto da pesquisa: Escola “X”

A escola “X”[1] pertence à rede pública municipal da cidade de Itanhaém. Está localizada no litoral do estado de São Paulo, situando-se em um bairro periférico na zona urbana. Atende em média 598 alunos, provenientes de bairros das proximidades; 60% dos alunos moram distante da unidade e necessitam de transporte escolar, que é custeado pelo município. A escola oferece Ensino Fundamental regular em ciclos III e IV, ou seja, de 6º ano ao 9º ano, funcionando em dois períodos em regime de Progressão Avaliada e Continuada, sendo os 8º e 9º anos no período da manhã, das 7h10 às 12h30 horas e os 6º e 7º anos no período da tarde, compreendendo o horário das 13h00 às 18h20.

A escola possui alta demanda, uma vez que a característica desta comunidade é o apreço pelo ensino prestado na unidade, relatado como de qualidade e de acordo

---

[1] A escola pesquisada se localiza no litoral sul do estado de São Paulo e por fins de segurança será tratada nesta pesquisa como escola “X”.

com suas expectativas. Nela, pode ser observado o índice do IDEB 5,4 no indicador de 2015.

O diagnóstico socioeconômico aponta a origem das famílias advindas das regiões Sudeste e Nordeste do país. O grau de instrução dos pais situa-se entre o Ensino Fundamental e o Ensino Médio completos. Cerca de 10% dos pais possuem nível superior de escolaridade. Todos possuem pelo menos um aparelho de TV em casa e 70% têm acesso a computador. Os pais e responsáveis são em sua maioria trabalhadores informais que conseguem um sustento mediano, sendo que apenas 15% não possuem condições, por estarem desempregados.

A escola tem um amplo espaço físico, comportando 9 salas de aulas que acomodam aproximadamente 30 alunos, em cada. Possui sala de informática com ar condicionado e 15 computadores utilizados pelos alunos em aulas anteriormente preparadas pelo professor; na mesma sala, há um espaço destinado à leitura. Há também uma sala multimídia com uma lousa digital e dois carrinhos com *tablets* que podem ser deslocados à sala de aula para a realização de aulas diferenciadas. A escola ainda conta com quadra coberta, pátio com espaço, onde são realizadas as merendas, bem como um espaço chamado de “praça”, onde os alunos podem ter atividades diferenciadas, como momento de leitura, brincadeiras. Outros espaços a destacar na escola são: secretaria, sala da direção, sala da coordenação, sala dos professores e espaço para material de educação física. Nas salas de aula, as lousas são negras com a utilização de giz; cada sala ainda possui um espaço onde ficam os livros didáticos, separados por disciplinas e por ano.

O quadro de funcionários é formado por 25 professores efetivos em seu quadro, sendo 8 afastados por motivos diversos e 7 contratados. A administração compõe-se de 2 escriturários, 2 auxiliares escolares, 2 inspetores, 4 ajudantes de serviços gerais e 3 guardas patrimoniais. A escola realiza Hora de Atividade Coletiva (HAC) às segundas-feiras das 10h50 às 12h50, sendo que nestes encontros são tratados de todos os assuntos relacionados à parte administrativa e pedagógica da escola.

No que diz respeito à disciplina matemática, consta no Projeto Político-Pedagógico (PPP) da escola como síntese dos objetivos: auxiliar o aluno no desenvolvimento do raciocínio lógico, de modo que ele perceba a importância da matemática para a resolução de problemas do seu cotidiano; ler e identificar padrões; fazer generalizações; elaborar conjecturas; usar modelos; desenvolver hábitos de estudo e pesquisa; interpretar e resolver situações-problema; comunicar-se matematicamente; representar e apresentar argumentos e resultados com precisão, fazendo uso da linguagem oral, gráfica e escrita. Aulas práticas e teóricas são disponibilizadas, de modo que coloquem o aluno no centro do processo de aprendizagem.

5.4.1 Caracterização do professor

O professor participante da pesquisa é o próprio pesquisador, a sua paixão pela matemática o acompanha desde quando ainda era um estudante na escola pública em que estudou, sempre foi bem dedicado aos estudos e adorava desafios. Já a sua paixão pela docência começou quando, após um curso de informática, passou a ser monitor dos alunos.

Iniciou sua carreira docente no ano de 2012 como funcionário do estado de São Paulo, atuando em uma escola de Ensino Fundamental e Médio na cidade de Cubatão. Em seu primeiro ano de trabalho, assumiu a responsabilidade de conduzir os conhecimentos matemáticos de quatro salas de sextos anos, acompanhando estas salas nos dois anos seguintes, sétimos e oitavos anos, momento que pôde observar as dificuldades apresentadas pelos alunos na disciplina, em especial quando da introdução à álgebra no sétimo ano. No ano de 2015, passou a trabalhar no programa de ensino integral, permanecendo lá por três anos e ministrando aulas para sétimos e nonos anos; neste período, as dificuldades na álgebra mais uma vez eram notórias.

No ano de 2018, deixou o programa de ensino integral para assumir cargo na prefeitura de Itanhaém, sendo designado como professor de quatro salas de sétimos anos, série em que o currículo prevê a introdução à álgebra, momento também que vislumbrou a oportunidade de pesquisar os motivos que poderiam levar os alunos a possuírem tais dificuldades, analisando como os alunos se encontram no desenvolvimento de um pensamento algébrico e propondo intervenção que desenvolva tal pensamento, partindo do pressuposto que, uma vez desenvolvida a aprendizagem da álgebra, ela pode se tornar mais agradável aos alunos.

5.4.2 Caracterização da sala de aula

No que diz respeito ao espaço físico, este é organizado em fileiras, porém, em algumas situações, os alunos formam grupos para realizar certas propostas, uma vez que podem contribuir um com o outro na troca de conhecimentos.

A turma em que será realizada a pesquisa é do sétimo ano, consta de 29 alunos, possuindo entre 11 e 12 anos. O grupo é composto por 17 meninas e 12 meninos, e estão estudando na mesma classe pelo segundo ano seguido, o que faz com que os alunos já se conheçam em relação às suas características pessoais. A maioria dos alunos demonstra comprometimento com os estudos, realiza as atividades propostas, questiona e expõe suas ideias, o que pode facilitar a identificação do desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos. Os momentos de indisciplina na classe são poucos e diante de propostas desafiadoras ficarão motivados ainda mais.

A avaliação diagnóstica, primeira etapa da intervenção, foi elaborada tendo como base as habilidades previstas na BNCC para os anos de primeiro ao sexto ano no tema álgebra. A proposta é desenvolver o tema previsto no planejamento. Convém aqui diferenciar a álgebra do pensamento algébrico, entendendo como pensamento algébrico todo conteúdo/habilidades trabalhados durante os anos iniciais e o primeiro ano dos anos finais que facilitem o ensino da álgebra, a qual se inicia no sétimo ano. A álgebra, por sua vez, é a parte da matemática que generaliza a aritmética mediante representações por variáveis, resolução de problemas por meio de fórmulas e representação de grandezas mediante símbolos.

Assim, na avaliação diagnóstica, o objetivo é saber o conhecimento que os alunos têm a respeito do conteúdo a ser ensinado. Após a avaliação diagnóstica, analisamos as produções, com a intenção de saber o que e o como os alunos responderam o conteúdo que foi proposto. A intenção foi avaliar a "maturidade" do pensamento algébrico com base nos estudos de Freitas (2003), observando as respostas dos alunos e a forma como elas foram desenvolvidas. Objetivávamos identificar se, nas respostas, os alunos apenas se utilizaram da linguagem materna, linguagem numérica ou da linguagem algébrica.

6 OS DADOS GERADOS: O ENSINO DA ÁLGEBRA NUMA PERSPECTIVA INVESTIGATIVA

Neste capítulo, apresentamos as atividades desenvolvidas em sala de aula com a intenção de analisar as estratégias de ensino que colaborassem para o aprendizado da álgebra. Inicialmente, foi realizada uma avaliação diagnóstica e a partir dos resultados fomos estabelecendo ações que estivessem duplamente comprometidas: tanto com o aprendizado da álgebra quanto com o desenvolvimento de uma postura investigativa.

6.1 A avaliação diagnóstica

A avaliação diagnóstica é a primeira etapa da intervenção e teve, no presente estudo, o objetivo de saber como os alunos concebiam o pensamento algébrico. As respostas dos alunos, na avaliação, poderiam apresentar indícios de lacunas ou de conceitos mal assimilados, que subsidiariam a intervenção, facilitando o desenvolvimento do pensamento algébrico para um futuro ensino da álgebra.

No que diz respeito à avaliação, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) apontam que a avaliação diagnóstica tem a função de alimentar, orientar e sustentar a intervenção pedagógica. A partir da avaliação, podemos, portanto, direcionar o trabalho a ser realizado, pois ela indicará os pontos necessários a serem investigados, indicando se a intervenção incidirá ainda no desenvolvimento do pensamento algébrico ou se na própria introdução à álgebra.

Cumpre lembrar que a Lei de Diretrizes e Bases (1996) destaca que a avaliação deve ocorrer durante todo o processo de ensino e aprendizagem, podendo ser esta diagnóstica, formativa ou somativa. A avaliação diagnóstica deve ocorrer antes do ensino, e tem por função avaliar “o que” e “como” o aluno conhece determinado conteúdo. Já a avaliação formativa ocorre durante o processo de aprendizagem, tendo por função avaliar e redirecionar o processo de ensino. Por fim, a avaliação somativa ocorre depois do ensino e tem por função avaliar o conhecimento adquirido pelo aluno.

Acerca da avaliação diagnóstica, temos que esta tem por objetivo:

> investigar seriamente o que os alunos “ainda” não compreenderam, o que “ainda” não produziram, o que “ainda” necessitam de maior atenção e orientação (...) enfim, localizar cada estudante em seu momento e trajetos percorridos, alterando-se radicalmente o enfoque avaliativo e as “práticas de recuperação” (HOFFMANN, 2008, p. 68).

Neste sentido, a avaliação diagnóstica é uma ferramenta fundamental para o início do trabalho e a sua análise será fonte de direcionamento para a intervenção pedagógica necessária.

6.1.1 A estrutura da avaliação

Tratando agora do presente trabalho, o objetivo da avaliação diagnóstica foi identificar o que os alunos conseguiram desenvolver ao longo dos anos anteriores de estudo em relação ao pensamento algébrico, valendo ressaltar que o ensino algébrico não era tão enfatizado nos PNC, diferente do que ocorreu na Base Nacional Comum Curricular (2017), na qual ganhou grande destaque, tornando-se inclusive um tema: álgebra. Para a construção da avaliação diagnóstica, utilizamos como referência a BNCC (Brasil, 2017), a qual propõe que sejam trabalhadas desde os anos iniciais habilidades que proporcionem o desenvolvimento do pensamento algébrico sem a manipulação de fórmulas e o rigor que a álgebra em si exige.

Para cada uma das habilidades previstas no tema álgebra desde o primeiro ano dos anos iniciais até o sexto ano, foram selecionados[2] exercícios que avaliaram a capacidade de resolução de problemas, o entendimento de sequências e padrões, o sentido do sinal de igualdade e a utilização de operações inversas, tomando o cuidado de selecionar exercícios que fossem desafiadores aos alunos e que induzissem ao pensamento algébrico. A partir dos resultados obtidos, a intervenção foi planejada e aplicada.

Vinte e nove alunos foram avaliados, divididos em sete grupos de três alunos e dois grupos de quatro. A aplicação da avaliação em grupo tornou o momento também de aprendizagem, pois, ao discutir o problema, os colegas aprenderam entre si. Para fins de identificação, os grupos foram nomeados de G1 até G9 e para fazer referência

[2] As atividades foram selecionadas com o auxílio do portal Nova Escola, tendo como referência as habilidades previstas nas BNCC (2017) para cada ano/série, sempre priorizando atividades que despertassem o olhar investigativo do aluno.

a um determinado aluno utilizaremos a letra inicial do nome do aluno aliado ao grupo em que está alocado. Por exemplo, se o aluno Daniel faz um comentário relevante para a pesquisa e o mesmo pertence ao Grupo 1, para referenciá-lo utilizaremos a nomenclatura G1-D. O mesmo ocorrerá na intervenção em si.

Como não dispomos de aulas duplas na referida sala e a avaliação é composta por 18 questões, optamos por aplicá-la em 3 aulas distintas, avaliando ao fim da terceira aula a necessidade ou não de uma quarta aula para a continuidade. Cabe esclarecer que os alunos foram orientados a efetuar a leitura das questões com atenção, sem pressa, e que discutissem com seus colegas acerca da resolução dos exercícios propostos.

6.1.2 Aplicação e análise da avaliação

O primeiro dia da avaliação diagnóstica ocorreu no dia 24 de agosto de 2018. Os alunos se dividiram conforme já citado e os exercícios propostos foram distribuídos. A seguir, relatamos o que ocorreu. O professor disse:

> Pessoal, vamos efetuar a leitura dos exercícios com atenção, não precisa ter pressa, discutam com os colegas a resolução e façam a anotação na folha de como chegaram à resolução. Vocês terão a princípio três aulas para concluir e se for necessário ampliaremos este tempo.

Durante a realização deste primeiro momento da avaliação diagnóstica, composta por 18 questões, pode-se perceber o engajamento dos alunos nas atividades, o trabalho em grupo e a satisfação de alguns alunos quando encontravam o caminho para a resolução do problema. O aluno G6-J, após conversar com os colegas e chegar a uma conclusão, disse: “Já sei, já sei (entusiasmado)”. Pode-se perceber também alguns alunos utilizando algumas palavras características do pensamento algébrico, como a aluna G3-J que disse: “vamos observar a sequência” e a aluna G5-N ao afirmar o seguinte: “percebe que tem um padrão”.

O segundo dia foi mantido o sistema que foi realizado no dia 28 de agosto e pode-se perceber que, à medida que os alunos avançavam nas questões, sentiam um pouco mais de dificuldade, a qual pode ser percebida quando alguns alunos admitiam não ter entendido a questão 3. Por exemplo, o aluno G6-GU disse: “professor, não entendi o que é pra fazer nesta questão 3” e o G8-S: “o que é pra fazer na 3? ”. O professor, por sua vez, afirmou: “efetuem a leitura do exercício novamente e procurem entender o que está sendo pedido”.

O exercício era o seguinte:

Questão 3 – Observe os números retirados em um jogo de cartas por dois amigos: Escolha o maior número de cartas possível e faça uma sequência em ordem crescente, explicando a regularidade. Por exemplo, na sequência 2, 4, 6 e 8, temos a seguinte regularidade: +2.

A principal dificuldade apresentada foi no entendimento do que era para ser realizado, pois os alunos tendiam a colocar todos os números em ordem crescente, quando na verdade deveriam escolher entre os números aqueles que formariam a maior sequência.

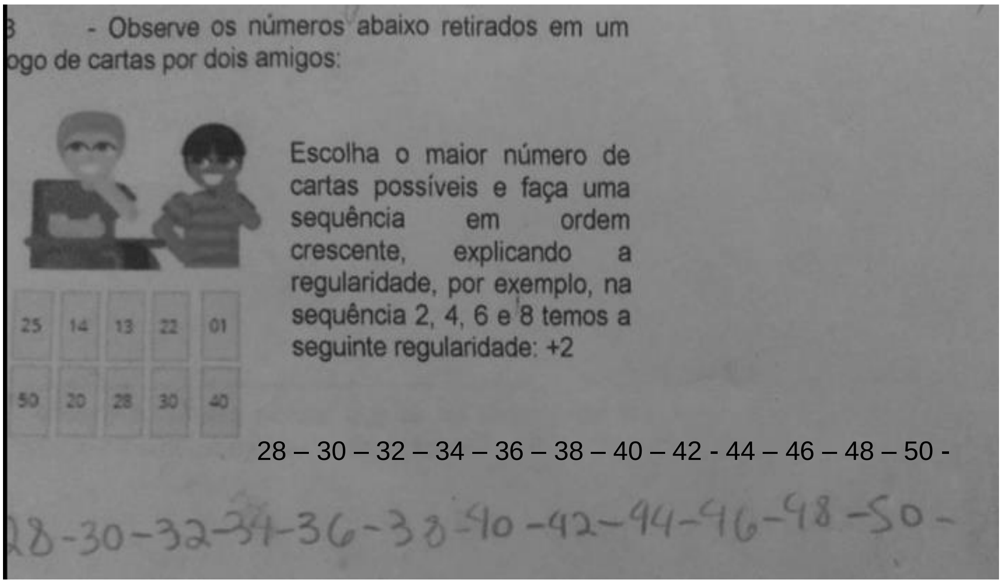
Neste sentido, Brosseau (1996) – ao tratar da Teoria da Situação Didática – estabelece a definição de contrato didático. Em sua definição, seria o que o aluno e o professor imaginam o que o outro espera dele e o que um pensa do outro, surgindo assim possibilidades de intervenção, devolução da parte didática das situações. No livro, são nomeados alguns efeitos do contrato didático, entre eles o efeito *topaze* (a resposta é previamente determinada). Na situação acima, quando a comanda afirma para fazer uma sequência em ordem crescente, o aluno fixa provavelmente sua atenção no termo “ordem crescente”, ignorando o termo sequência. Isso é algo pouco trabalhado nos anos anteriores. Assim, o(a) aluno(a) tende a colocar todos os números em ordem crescente, não procurando uma sequência.

Cabe destacar que a BNCC (Brasil, 2017) prevê o trabalho de sequências e regularidades desde o primeiro ano do Ensino Fundamental. Embora o PCN (Brasil,

1997) de matemática cite o ensino da álgebra, já nesta fase não era algo tão explícito como agora. As ações observadas nos alunos demonstram a necessidade do trabalho algébrico desde os primeiros anos de escolaridade.

Observemos na imagem abaixo a resposta de um dos grupos.

Figura 5 – Produção do Grupo 8



Fonte: Próprio autor (2018).

.

O professor nesta fase solicitou aos alunos que: “continuem pensando em uma forma de resolução dos exercícios, se for necessário façam novamente a leitura e tentem entender o que está sendo pedido”. Por se tratar de uma avaliação diagnóstica, foi evitado qualquer tipo de intervenção que influenciasse diretamente na resposta dos alunos, uma vez que o objetivo era entender as lacunas que precisavam ser trabalhadas na intervenção. Ainda foi possível perceber neste segundo dia que os grupos estavam demorando na resolução dos exercícios, o que já nos fazia pensar em aumentar o tempo para a realização da avaliação diagnóstica.

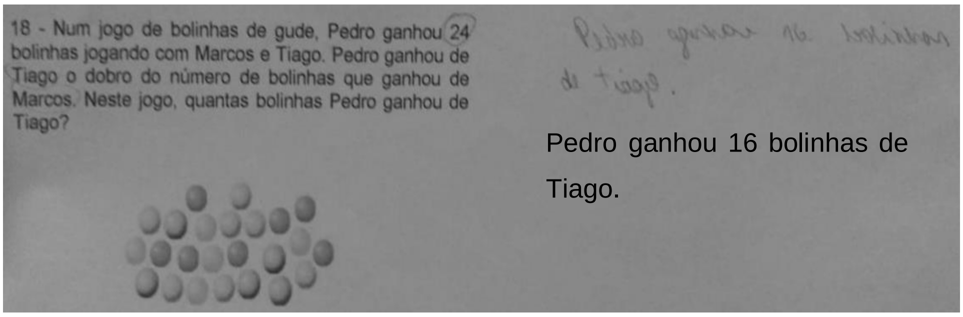
No terceiro dia, realizado no dia 29 de agosto, os alunos foram orientados pelo professor:

> Lembrem-se de se concentrar mais nos enunciados das questões para melhor entender aquilo que está sendo pedido. Eu pude perceber que vocês

> estão acertando o caminho e muitas vezes errando ao realizar o cálculo, então mais atenção.

Esta comanda se fez necessária, à medida que erros aritméticos e indícios de acertos no pensamento algébrico foram percebidos. Diante da constatação de que apenas dois grupos haviam encerrado, foi proposta a quarta aula para finalizar a avaliação diagnóstica, momento no qual também se solicitou aos alunos que escrevessem quais foram suas principais dificuldades. Alguns alunos ainda verbalizaram as dificuldades, como a aluna G5-A que disse “A dificuldade foi pensar algebricamente o tempo todo”. A aluna G4-J afirmou: “a questão 18 para nós estava confusa, mas após conversar chegamos a uma conclusão”. A conclusão à qual a aluna se referia era como resolver a questão e, embora não tenha expressado na questão a forma de resolução, obteve uma resposta coerente.

Figura 6 – Produção do Grupo 4 (exercício 18)



Fonte: próprio autor (2018).

O aluno G9-W declarou: “tivemos dificuldade na interpretação de algumas questões, aí lemos as questões várias vezes pra entender o que estava sendo pedido”.

Passamos agora a analisar os resultados das avaliações com o foco em perceber se a classe conseguiu desenvolver o pensamento algébrico e qual intervenção deveríamos assumir.

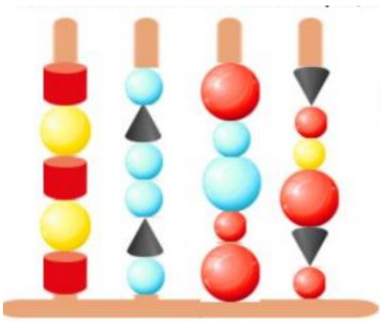
A avaliação diagnóstica proposta possui 18 questões que estão relacionadas às habilidades previstas no tema álgebra na BNCC (Brasil, 2017) para os 5 primeiros anos iniciais e o primeiro ano final. Foram elaboradas com o aumento de nível progressivo e cada questão avalia a existência de uma ou mais habilidades, previstas na BNCC (Brasil, 2017) e referentes ao planejamento escolar para a série pesquisada.

As duas primeiras questões relacionavam habilidades do primeiro e do segundo ano inicial, a saber:

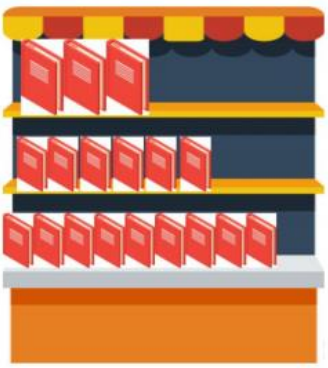
> (EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida e (EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos (BRASIL, 2016, p. 277).

Questão 1 – Lucas está jogando *videogame* e precisa descobrir a senha para destravar a próxima fase. Ajude Lucas a descobrir a senha completando os pinos com a peça que falta.

DICA: CADA PINO DA SENHA SEGUE UM PADRÃO DIFERENTE.

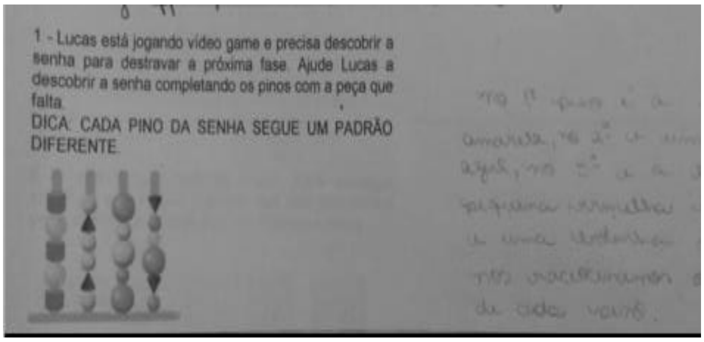


Questão 2 – Ana resolveu arrumar sua estante de livros, começando de cima para baixo. Explique que padrão Ana seguiu em uma possível quarta prateleira.



Na primeira questão, 78% dos grupos conseguiram desenvolver e na segunda 100% dos grupos. Podemos então perceber que os alunos conseguem identificar padrões e determinar elementos ausentes, quando representados por figuras, conforme vemos a seguir:

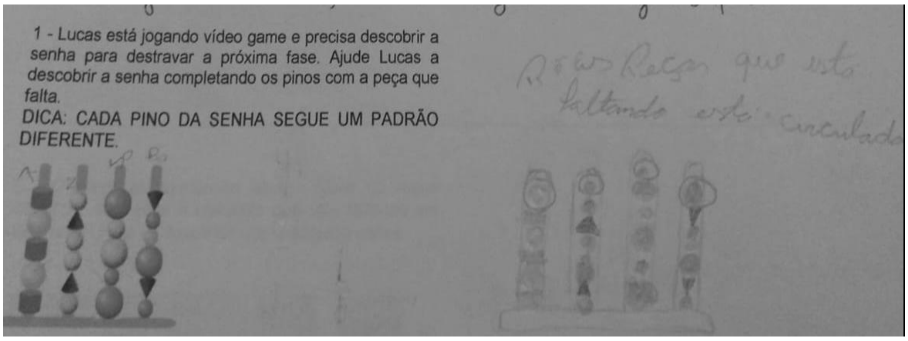
Figura 7 – Produção do Grupo 4 (exercício 1)



No 1º pino é a amarela, no 2º e uma bolinha azul, no 3º e a bolinha vermelha pequena e no 4º e uma bolinha vermelha, nos raciocinamos o padrão de cada pino

Fonte: próprio autor (2018)

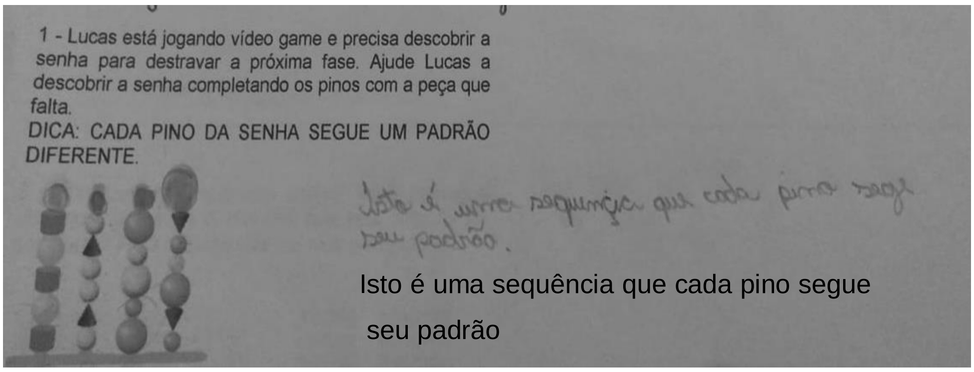
Figura 8 – Produção do Grupo 1 (exercício 1)



As peças que estão faltando estão circulado.

Fonte: próprio autor (2018).

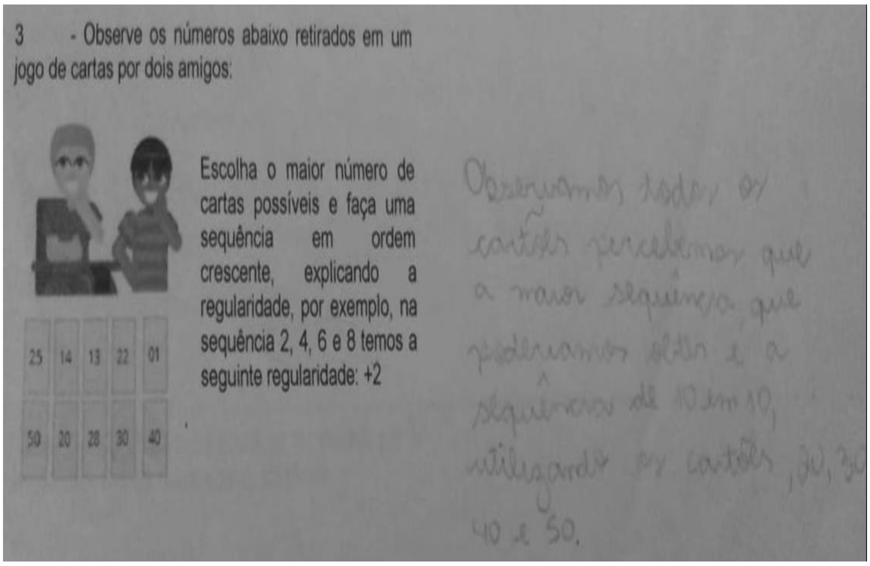
Figura 9 – Produção do Grupo 7 (exercício 1)



Fonte: próprio autor (2018).

A terceira questão, já apresentada acima, exigia a identificação da sequência numérica e a indicação de um padrão de regularidade, o que também foi realizado coerentemente por 89% dos grupos.

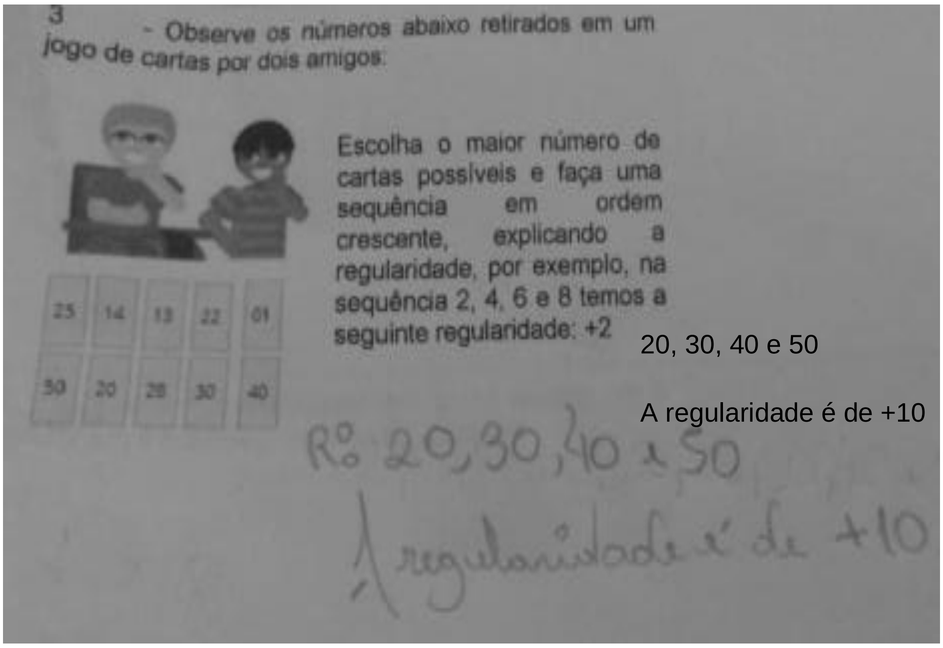
Figura 10 – Produção Grupo 5 (exercício 3)



Observamos todos os cartões percebemos que a maior sequência que poderemos obter é a sequência de 10 em 10 utilizando os cartões, 20, 30, 40 e 50

Fonte: próprio autor (2018).

Figura 11 – Produção Grupo 3 (exercício 3)



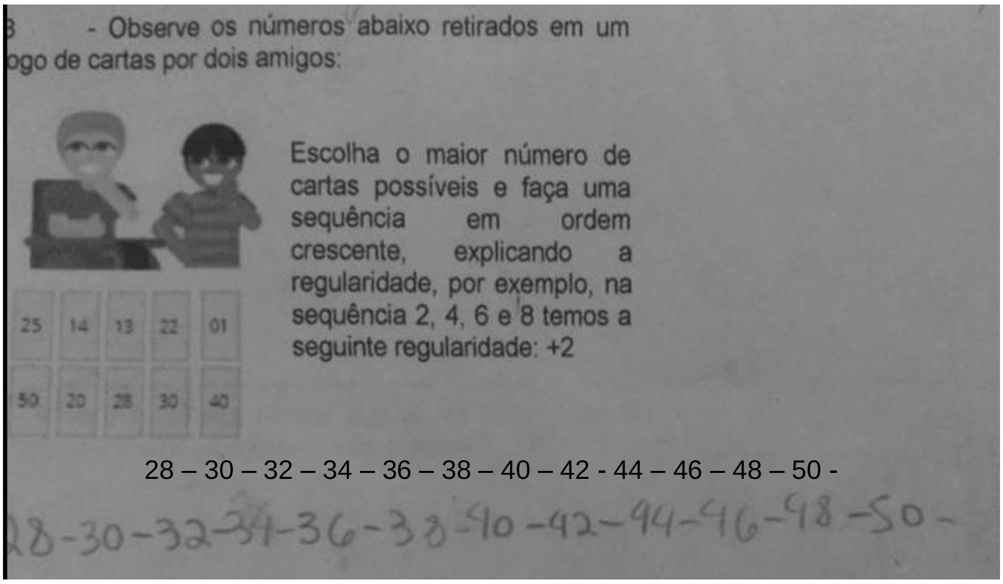
20, 30, 40 e 50

A regularidade é de +10

Fonte: próprio autor (2018).

O grupo 8 não acertou a questão, por entender que era somente colocar em ordem crescente, não pensando na ideia de regularidade.

Figura 12 – Produção Grupo 8 (exercício 3)



Fonte: próprio autor (2018).

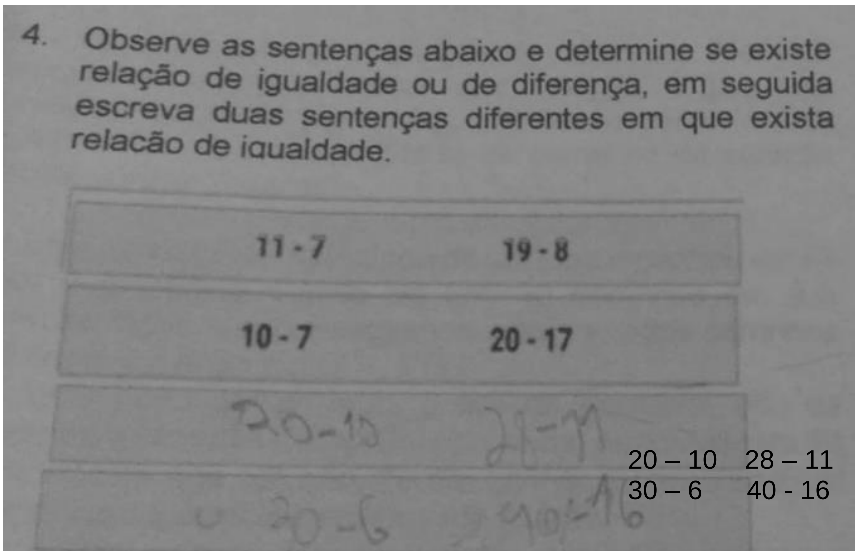
A quarta questão tinha por objetivo avaliar o entendimento da relação de igualdade e de desigualdade de acordo com a seguinte habilidade: “(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença” (BRASIL, 2016, p. 285).

Questão 4 – Observe as sentenças abaixo e determine se existe relação de igualdade ou de diferença. Em seguida, escreva duas sentenças diferentes em que exista relação de igualdade.

13 + 40 + 53	22 +78 + 6	10 + 43 + 52	22 + 78 + 6
10 - 7	20 - 17	11 - 7	19 - 8

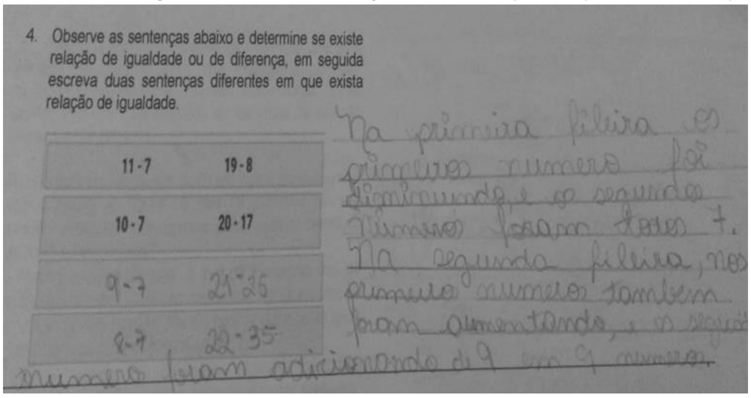
Nesta questão, já foi possível perceber maior dificuldade, principalmente em determinar se existia relação de igualdade ou não. Nesta questão, 66% dos grupos responderam corretamente. Esta observação nos permitiu inserir na intervenção ações que fizessem com que os alunos entendessem a relação de igualdade, tornando esta habilidade um dos pontos de atenção da intervenção. Ao observar os erros, percebeu-se que o grupo G3 deixou a questão em branco, o que indica não ter ao menos entendido o enunciado; já os grupos G1 e G2 tentaram relacionar as sentenças, não identificando as relações e o grupo G8 esboçou o entendimento, mas não conseguindo concluir a questão.

Figura 13 – Produção do Grupo 1 (exercício 4)



Fonte: próprio autor (2018).

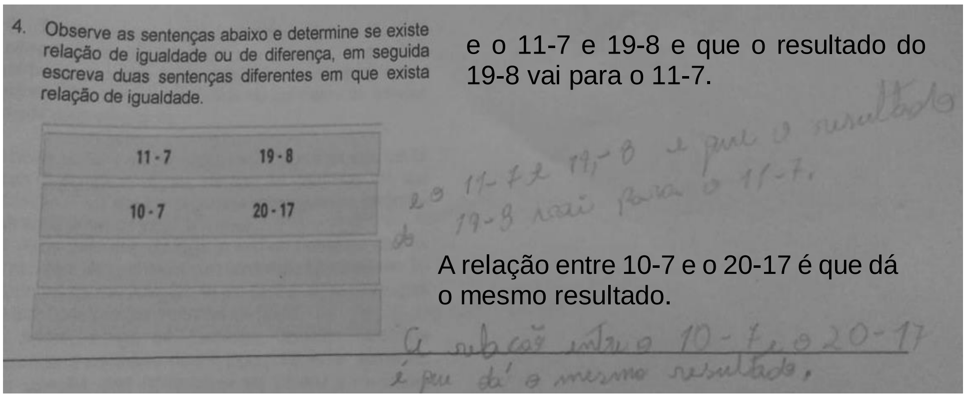
Figura 14 – Produção do Grupo 2 (exercício 4)



Na primeira fileira os primeiros números foi diminuindo e os segundos números foram todos 7. Na segunda fileira, nos primeiros números também foram aumentando e os segundos números foram adicionando de 9 em 9 números.

Fonte: próprio autor (2018).

Figura 15 – Produção do Grupo 8 (exercício 4)



Fonte: próprio autor (2018).

Todos os grupos conseguiram desenvolver a quinta questão, que tratava de regularidade, padrões e múltiplos. As questões 6 e 7 eram semelhantes e avaliavam a capacidade de perceber a utilização da operação inversa. Estas questões são apresentadas abaixo, e indicam: “(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades” (BRASIL, 2016, p. 289).

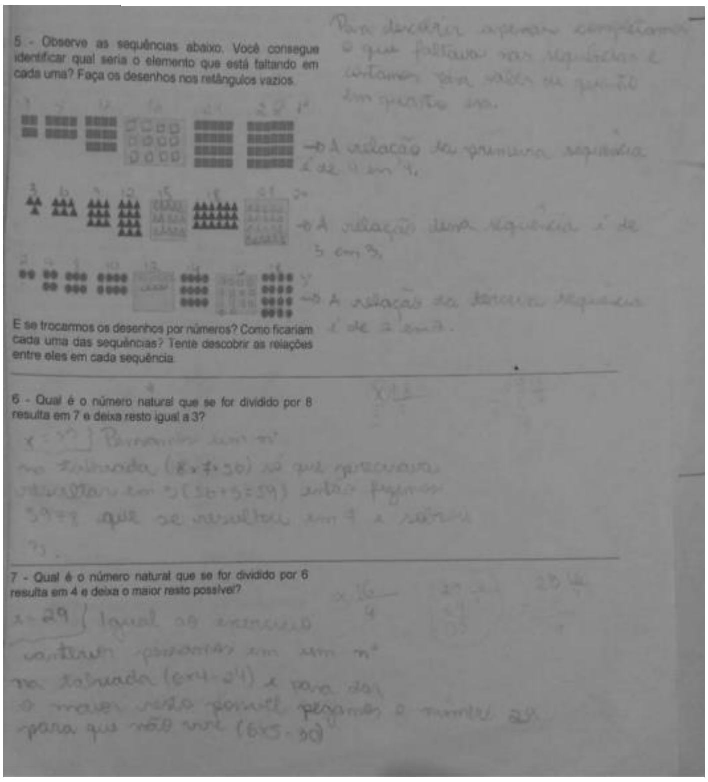
Questão 6 – Qual é o número natural que, se for dividido por 8, resulta em 7 e deixa resto igual a 3?

Questão 7 – Qual é o número natural que, se for dividido por 6, resulta em 4 e deixa o maior resto possível?

Ao observar que 44% dos grupos não conseguiram desenvolver as questões supracitadas, pode-se perceber que a ideia da utilização da operação inversa ainda é um desafio para os alunos. Dessa forma, ela se torna um ponto de atenção, uma vez que a ideia é utilizada com frequência na álgebra. Assim, a partir do observado, preocupamo-nos na intervenção em enfatizar a utilização deste recurso, a operação inversa, permitindo com que os alunos entendessem sua utilização.

Observemos alguns exemplos, primeiro de um grupo que desenvolveu as questões acima corretamente e em seguida um grupo que não desenvolveu

Figura 16 – Produção do Grupo 5 (exercícios do 5 ao 7)



Para descobrir apenas completamos o que faltava nas sequências e contamos para saber de quanto em quanto era.

A relação da primeira sequência é de 4 em 4.

A relação desta sequência é de 3 em 3.

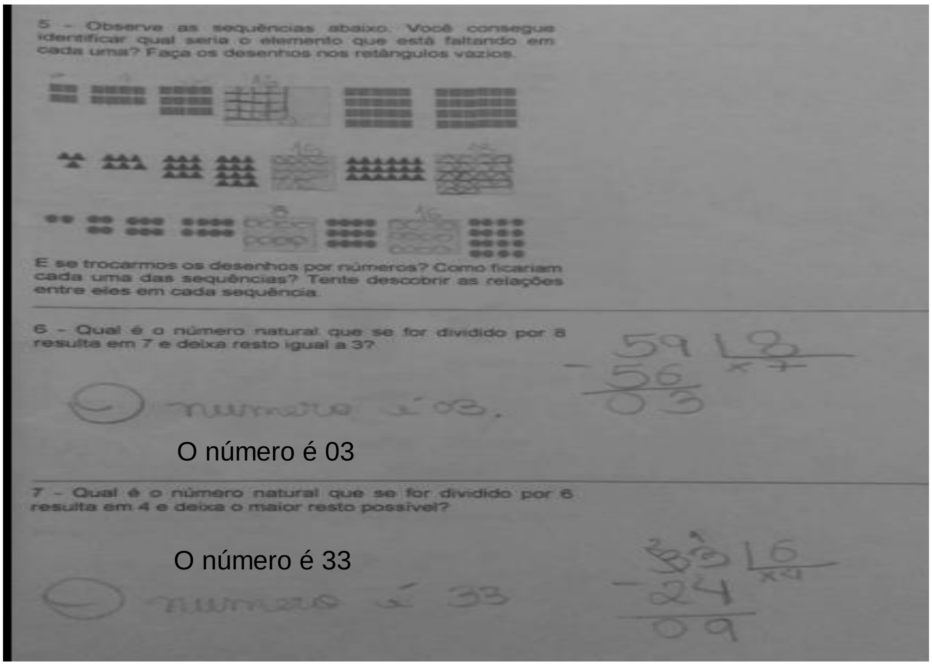
A relação da terceira sequência é de 2 em 2.

Pensamos em um nº na tabuada (8x7=56) só que precisava resultar em 3 (56+3=59) então fizemos 59:8 que se resultou em 7 e sobrou 3

Igual ao exercício anterior pensamos em um nº na tabuada (6x4=24) e para dar o maior resto possível pegamos o número 29 para que não vire (6x5=30).

Fonte: próprio autor (2018).

Figura 17 – Produção do grupo 2 (exercícios do 5 ao 7)



Fonte: próprio autor (2018).

As questões 8 e 9 mobilizam a mesma habilidade, porém de forma mais contextualizadas e o resultado surpreendeu, uma vez que todos os grupos entenderam o que foi solicitado e desenvolveram corretamente, o que deixa claro que a contextualização facilita o entendimento das questões. Isso porque a problemática se aproxima da realidade dos alunos. O que não invalida a questão anterior, pois a ideia da operação inversa e a capacidade de abstração do aluno são exploradas. Para melhor entender, observe como foram solicitadas as questões citadas.

Questão 8 – Fernando tem uma coleção de carrinhos. Ele está sempre tentando aumentar sua coleção, e por isso participa de vários jogos. Algumas vezes perde, outras, ganha. Por isso, a quantidade de carrinhos da coleção muda constantemente.

a) Esta semana ele participou de um jogo e ganhou um *kit* com 6 carrinhos. Agora, ele tem 18 carrinhos em sua coleção. Será que conseguimos saber quantos carrinhos ele tinha antes do jogo?

b) Após participar do jogo, o avô de Fernando deu de presente a ele uma caixa com carrinhos. Agora ele tem 30 carrinhos na sua coleção. Se ele ganhar outra caixa igual a esta, com quantos carrinhos ele ficará?

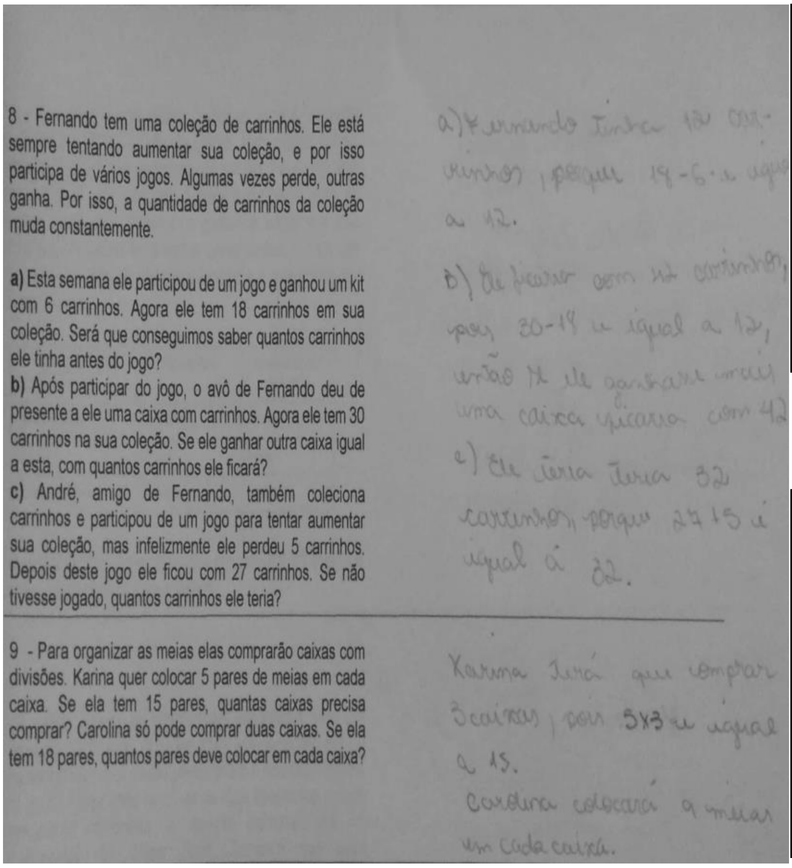
c) André, amigo de Fernando, também coleciona carrinhos e participou de um jogo para tentar aumentar sua coleção, mas infelizmente ele perdeu 5 carrinhos. Depois deste jogo, ele ficou com 27 carrinhos. Se não tivesse jogado, quantos carrinhos ele teria?

Questão 9 – Para organizar as meias, elas comprarão caixas com divisões. Karina quer colocar 5 pares de meias em cada caixa. Se ela tem 15 pares, quantas caixas precisa comprar? Carolina só pode comprar duas caixas. Se ela tem 18 pares, quantos pares deve colocar em cada caixa?

Estas questões também permitiram observar com clareza a maturidade algébrica dos grupos, levando em consideração os estudos de Freitas (2003), em que, ao efetuar a análise de respostas, classifica-as em linguagem natural, numérica e algébrica, processo no qual na linguagem natural o aluno escreve suas conclusões, socorrendo-se da língua materna; na linguagem numérica, utiliza operações aritméticas para chegar aos resultados e na linguagem algébrica tenta demonstrar suas respostas utilizando incógnitas e variáveis.

Na classe pesquisada, apenas um dos grupos demonstrou esta maturidade algébrica, enquanto dois responderam empregando a linguagem natural e os demais a linguagem numérica. Diante desta situação, uma das preocupações na intervenção foi propiciar ao aluno a oportunidade de realizar a transformação da linguagem materna para a linguagem algébrica, sempre utilizando uma postura investigativa. Para deixar mais claro, abaixo vamos mostrar um exemplo de cada uma das linguagens.

Figura 18 – Utilização da linguagem natural



8 - Fernando tem uma coleção de carrinhos. Ele está sempre tentando aumentar sua coleção, e por isso participa de vários jogos. Algumas vezes perde, outras ganha. Por isso, a quantidade de carrinhos da coleção muda constantemente.

a) Esta semana ele participou de um jogo e ganhou um kit com 6 carrinhos. Agora ele tem 18 carrinhos em sua coleção. Será que conseguimos saber quantos carrinhos ele tinha antes do jogo?

b) Após participar do jogo, o avô de Fernando deu de presente a ele uma caixa com carrinhos. Agora ele tem 30 carrinhos na sua coleção. Se ele ganhar outra caixa igual a esta, com quantos carrinhos ele ficará?

c) André, amigo de Fernando, também coleciona carrinhos e participou de um jogo para tentar aumentar sua coleção, mas infelizmente ele perdeu 5 carrinhos. Depois deste jogo ele ficou com 27 carrinhos. Se não tivesse jogado, quantos carrinhos ele teria?

9 - Para organizar as meias elas comprarão caixas com divisões. Karina quer colocar 5 pares de meias em cada caixa. Se ela tem 15 pares, quantas caixas precisa comprar? Carolina só pode comprar duas caixas. Se ela tem 18 pares, quantos pares deve colocar em cada caixa?

a) Fernando tinha 12 carrinhos, porque 18-6 é igual a 12.

b) Ele ficaria com 42 carrinhos, pois 30-18 é igual a 12, então se ele ganhasse mais uma caixa ficaria com 42.

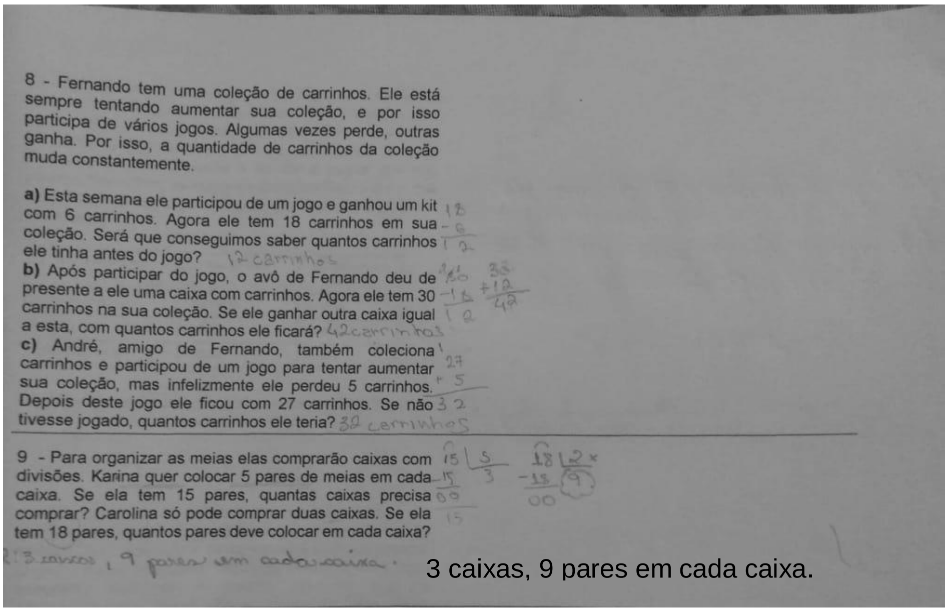
c) Ele teria 32 carrinhos, por que 27+5 é igual a 32.

Karina terá que comprar 3 caixas, pois 5x3 é igual a 15.

Carolina colocará 9 meias em cada caixa.

Fonte: próprio autor (2018).

Figura 19 – Utilização da linguagem numérica



8 - Fernando tem uma coleção de carrinhos. Ele está sempre tentando aumentar sua coleção, e por isso participa de vários jogos. Algumas vezes perde, outras ganha. Por isso, a quantidade de carrinhos da coleção muda constantemente.

a) Esta semana ele participou de um jogo e ganhou um kit com 6 carrinhos. Agora ele tem 18 carrinhos em sua coleção. Será que conseguimos saber quantos carrinhos ele tinha antes do jogo? 12 carrinhos

b) Após participar do jogo, o avô de Fernando deu de presente a ele uma caixa com carrinhos. Agora ele tem 30 carrinhos na sua coleção. Se ele ganhar outra caixa igual a esta, com quantos carrinhos ele ficará? 42 carrinhos

c) André, amigo de Fernando, também coleciona carrinhos e participou de um jogo para tentar aumentar sua coleção, mas infelizmente ele perdeu 5 carrinhos. Depois deste jogo ele ficou com 27 carrinhos. Se não tivesse jogado, quantos carrinhos ele teria? 32 carrinhos

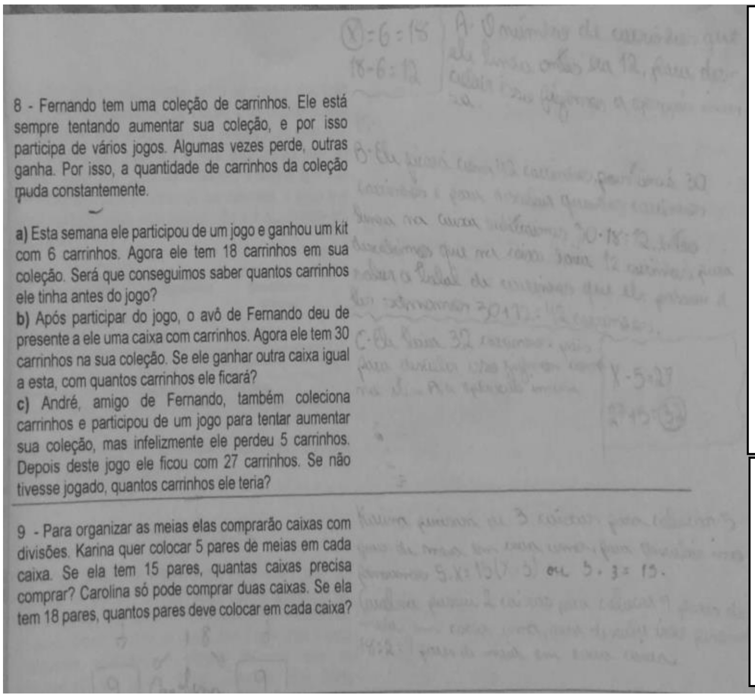
9 - Para organizar as meias elas comprarão caixas com divisões. Karina quer colocar 5 pares de meias em cada caixa. Se ela tem 15 pares, quantas caixas precisa comprar? Carolina só pode comprar duas caixas. Se ela tem 18 pares, quantos pares deve colocar em cada caixa?

R: 3 caixas, 9 pares em cada caixa.

3 caixas, 9 pares em cada caixa.

Fonte: próprio autor (2018).

Figura 20 – Utilização da linguagem algébrica



8 - Fernando tem uma coleção de carrinhos. Ele está sempre tentando aumentar sua coleção, e por isso participa de vários jogos. Algumas vezes perde, outras ganha. Por isso, a quantidade de carrinhos da coleção muda constantemente.

a) Esta semana ele participou de um jogo e ganhou um kit com 6 carrinhos. Agora ele tem 18 carrinhos em sua coleção. Será que conseguimos saber quantos carrinhos ele tinha antes do jogo?

b) Após participar do jogo, o avô de Fernando deu de presente a ele uma caixa com carrinhos. Agora ele tem 30 carrinhos na sua coleção. Se ele ganhar outra caixa igual a esta, com quantos carrinhos ele ficará?

c) André, amigo de Fernando, também coleciona carrinhos e participou de um jogo para tentar aumentar sua coleção, mas infelizmente ele perdeu 5 carrinhos. Depois deste jogo ele ficou com 27 carrinhos. Se não tivesse jogado, quantos carrinhos ele teria?

9 - Para organizar as meias elas comprarão caixas com divisões. Karina quer colocar 5 pares de meias em cada caixa. Se ela tem 15 pares, quantas caixas precisa comprar? Carolina só pode comprar duas caixas. Se ela tem 18 pares, quantos pares deve colocar em cada caixa?

O número de carrinho que ele tinha antes era 12, para descobrir isso fizemos a operação inversa.

Ele ficará com 42 carrinhos, pois tinha 30 carrinhos e para descobrir quantos carrinhos tinha na caixa subtraímos 30-18=12, então descobrimos que na caixa havia 12 carrinhos para saber o total de carrinhos que ele passou a ter somamos 30+12=42 carrinhos.

Ele teria 32 carrinhos pois para descobrir isso fizemos como no item A, operação inversa.

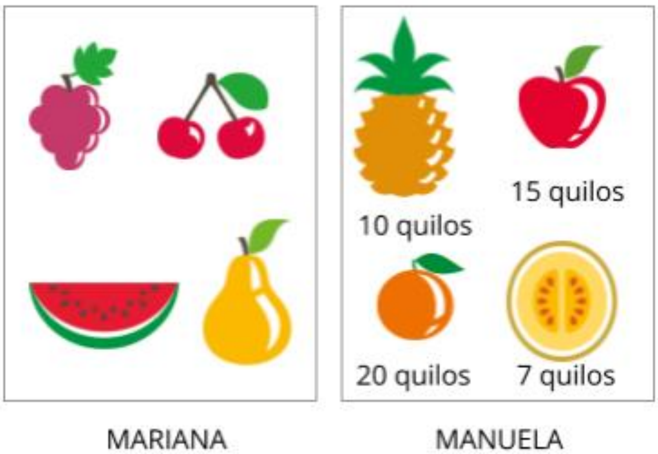
Karina precisará de 3 caixas para colocar 5 pares de meia em cada uma, para descobrir isso pensamos 5x=15 (x=3) ou 5.3=15.
Carolina possui 2 caixas para colocar 9 pares de meia em cada uma, para descobrir isso pensamos 18:2=9

Fonte: próprio autor (2018).

As questões 10, 11 e 17, que avaliaram o entendimento da relação de igualdade, trouxeram um ponto de atenção, pois na questão 10 o número de acertos foi de apenas 44%, aumentando um pouco na questão 11, na qual a porcentagem de acertos foi de 66%, deixando clara a dificuldade apresentada pelos alunos sobre o significado do sinal de igualdade e a sua relação de equivalência. Já a questão 17, a qual tinha um objetivo semelhante à porcentagem de acertos, manteve-se em 44%. Esta observação reforça a ideia da necessidade de se trabalhar a relação de equivalência na intervenção, o que posteriormente fortalecerá a ideia da utilização de equilíbrio, muito utilizado nas manipulações algébricas.

(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos (BRASIL, 2016, p. 289).

Questão 10 – Mariana e Manuela foram comprar frutas para a festa saudável que haverá na rua. Para não haver injustiças, elas decidiram que cada uma deveria levar a mesma quantidade de peso, 52 quilos. Veja abaixo o que elas levaram: Os pais de Mariana acharam que era muita fruta e pediram que ela deixasse no mercado 17 quilos de fruta. Para continuarem com o combinado que fizeram, quais frutas Manuela levará para a festa?

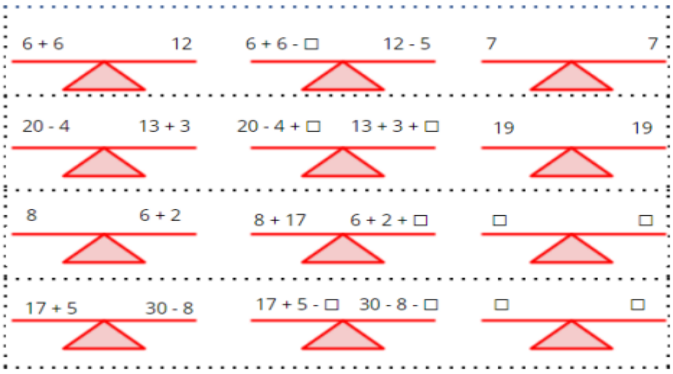


(EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais (BRASIL, 2016, p. 289).

Questão 11 – Complete as lacunas com números, de forma a deixar as igualdades verdadeiras.

12 + 7 = 10 + ___	15 - 7 = ___ - 8
15 + ___ = 25 + 7	___ - 9 = 15 - 3
___ + 12 = 14 + 14	18 - 6 = 25 - ____

Questão 17 – Vamos manter as balanças equilibradas:



É importante lembrar que entender a relação de igualdade é fundamental para entender a álgebra e este indicador pode ser importante para realização da intervenção.

As questões 13, 14 e 15, embora contextualizadas, não foram bem compreendidas, principalmente a questão 13, cujo objetivo era, a partir do proposto, desenvolver uma sentença que representasse a situação-problema. As questões 14 e 15 buscavam nos alunos um entendimento de proporcionalidade, e diante do que foi observado há muita dificuldade neste sentido, uma vez que a questão 15, por exemplo, foi respondida adequadamente por apenas dois grupos. Vamos observar as habilidades exigidas e as questões propostas.

(EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido (BRASIL, 2016, p. 293).

Questão 13 – Dois grupos de motociclistas resolveram fazer um passeio no feriado. O grupo Zeus era composto por 25 motociclistas, que juntos percorreram 5.950 quilômetros. O grupo Feras tinha 5 vezes mais integrantes e cada integrante percorreu o mesmo percurso que os integrantes do grupo Zeus. Sabendo que cada motociclista fez o mesmo percurso. Qual foi o percurso realizado por cada integrante deste grupo? O que posso afirmar sobre o percurso realizado pelos dois grupos?

(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros (BRASIL,2016, p. 293).

Questão 14 – Resolva as situações abaixo:

a) Com um litro de refrigerante, é possível servir 4 copos de 250 ml. Quantos litros são necessários para servir 2 copos de refrigerante para 12 pessoas?

b) Com um pacote de pipoca que custa R$ 2,50, consigo servir pipoca para 3 pessoas. Quanto gastarei para servir pipoca para meus 12 amigos?

c) Se eu convidar somente a metade dos meus amigos, quanto devo comprar de pipoca e de refrigerante?

(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo (BRASIL, 2016, p. 293).

Questão 15 – Rogério e Karina são irmãos. Nos finais de semana, eles trabalham vendendo sorvete. Esse final de semana eles venderam juntos R$ 75,00. Agora eles precisam dividir o dinheiro. O problema é que Karina vendeu o dobro do que Rogério vendeu. Então responda:

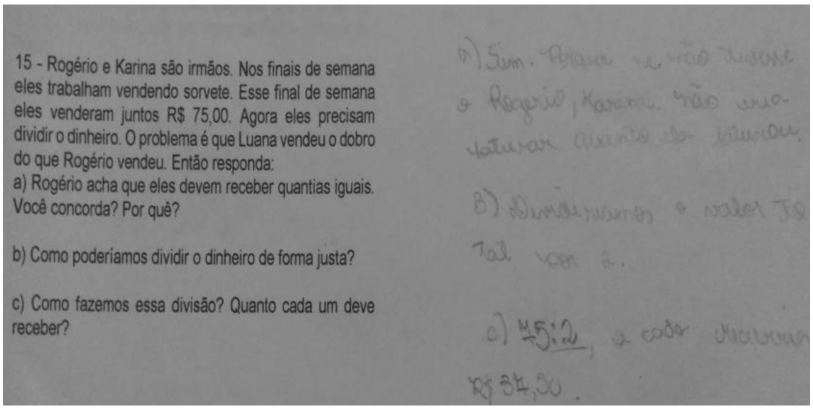
a) Rogério acha que eles devem receber quantias iguais. Você concorda? Por quê?

b) Como poderíamos dividir o dinheiro de forma justa?

c) Como fazemos essa divisão? Quanto cada um deve receber?

Após efetuar a análise das 3 questões, enfatizarei as respostas dos alunos na questão 15, pois ela nos aponta claramente a dificuldade que os alunos possuem quando falamos em proporção. Veremos algumas produções, analisando os erros.

Figura 21 – Produção dos alunos (questão 15-1)



a) Sim, porque se não tivesse o Rogério, Karina não iria faturar quanto ela faturou.

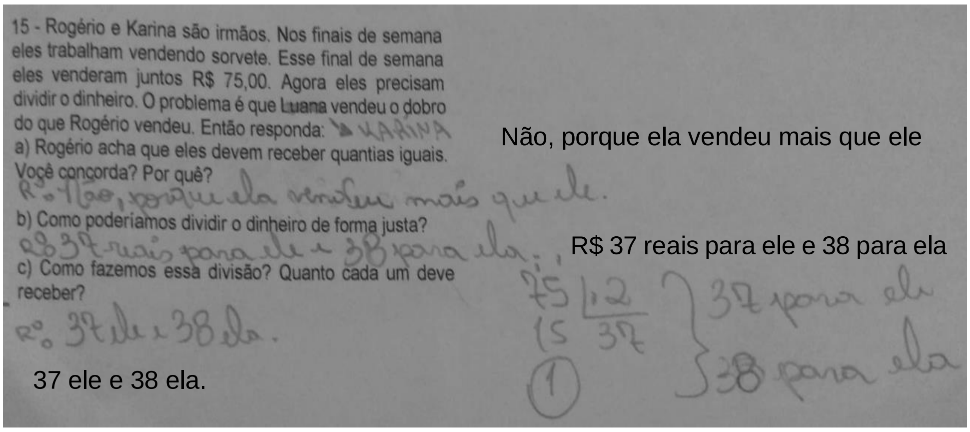
b) Dividiríamos o valor total por 2.

c) 75:2 e cada receberia R$ 37,50

Fonte: próprio autor (2018).

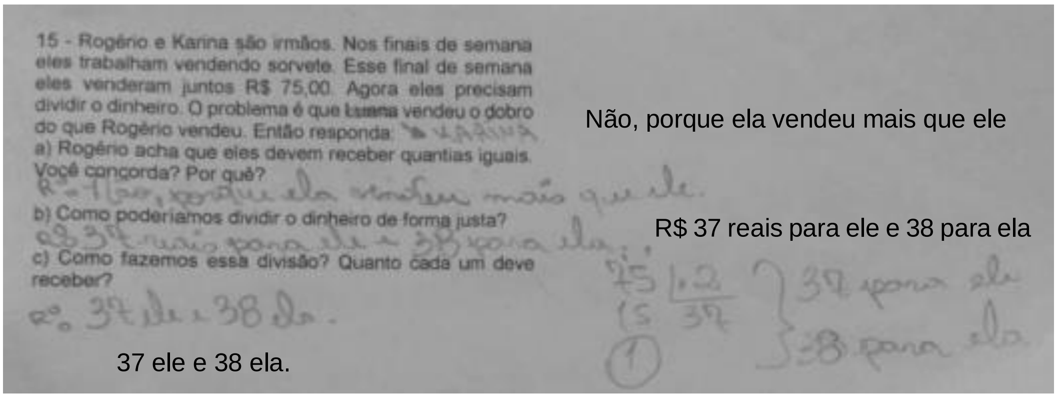
O grupo acima foi o único grupo que entendeu como correto a divisão igualitária, realizando dentro deste pensamento os cálculos. Na visão do aluno independente de quem teria trabalhado mais, o lucro deveria ser dividido igualitariamente, trata-se de uma visão lógica do aluno, mas que matematicamente e dentro da proposta da questão tornam suas respostas incoerentes. Afirmar que o grupo está errado seria incoerente, uma vez que depende da visão de mundo do aluno. No entanto, diante da proposta da atividade, que é análise, se o aluno tem entendimento da divisão proporcional, as respostas se tornam incoerentes.

Figura 22 – Produção do aluno (questão 15-2)



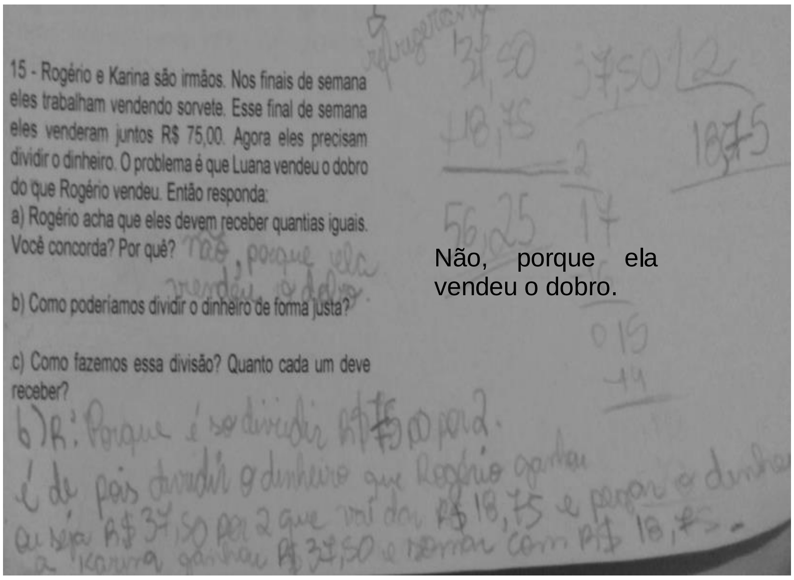
Fonte: próprio autor (2018).

Figura 23 – Produção do aluno (questão 15-3)



Fonte: próprio autor (2018)

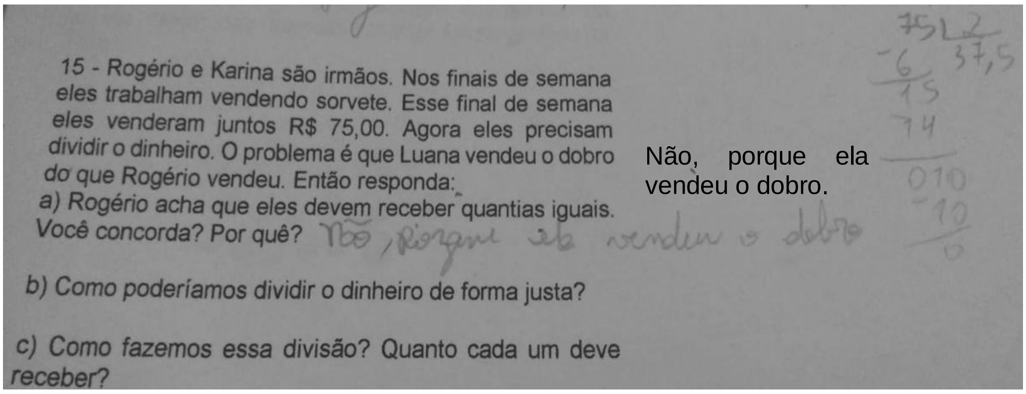
Figura 24 – Produção do aluno (questão 15-4)



b) Porque é só dividir R$ 75,00 por 2 e depois dividir o dinheiro que Rogério ganhou, ou seja, R$ 37,50 por 2 que vai dar R$ 18,75 e pegar o dinheiro que a Karina ganhou R$ 37,50 e somar com R$ 18,75.

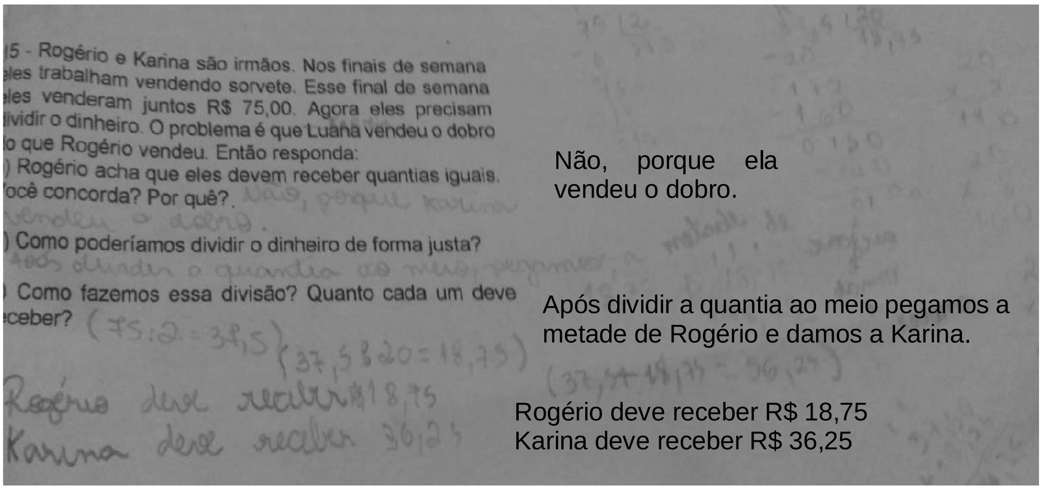
Fonte: próprio autor (2018).

Figura 25 – Produção do aluno (questão 15-5)



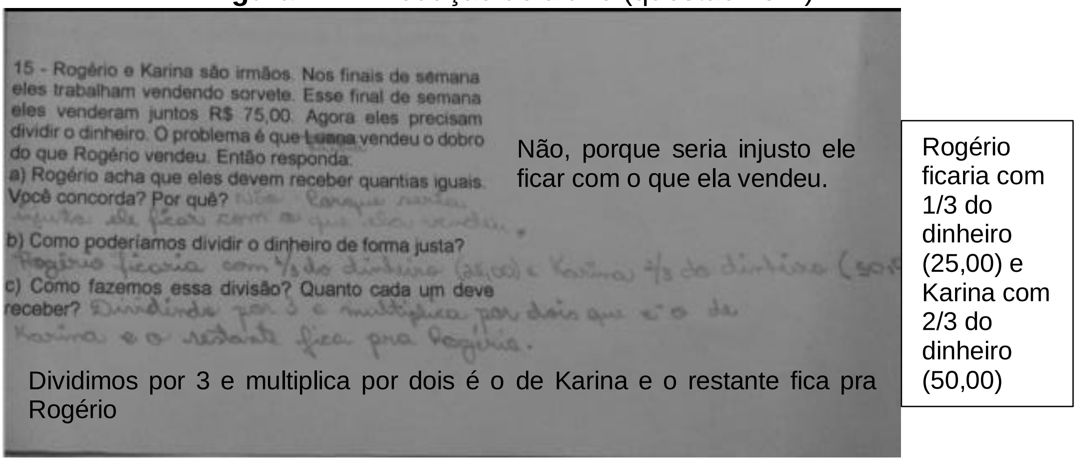
Fonte: próprio autor (2018).

Figura 26 – Produção do aluno (questão 15-6)



Fonte: próprio autor (2018).

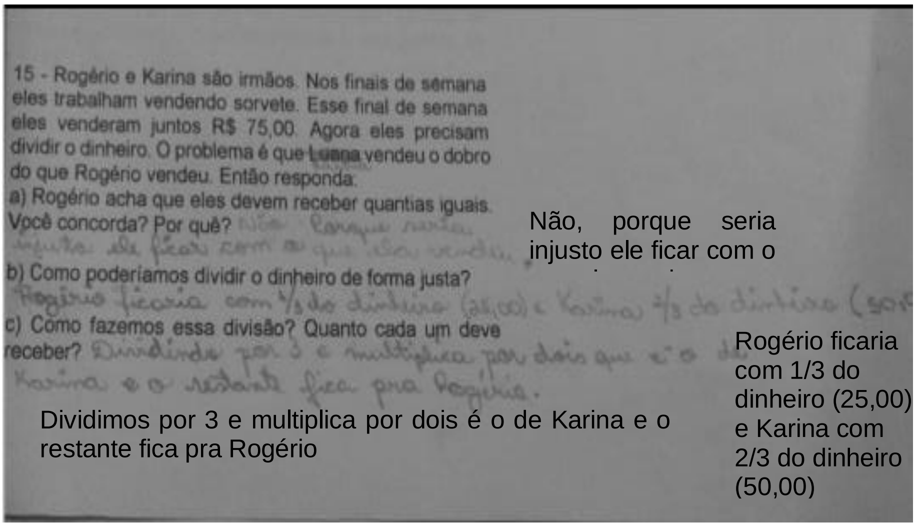
Figura 27 – Produção do aluno (questão 15-7)



Fonte: próprio autor (2018).

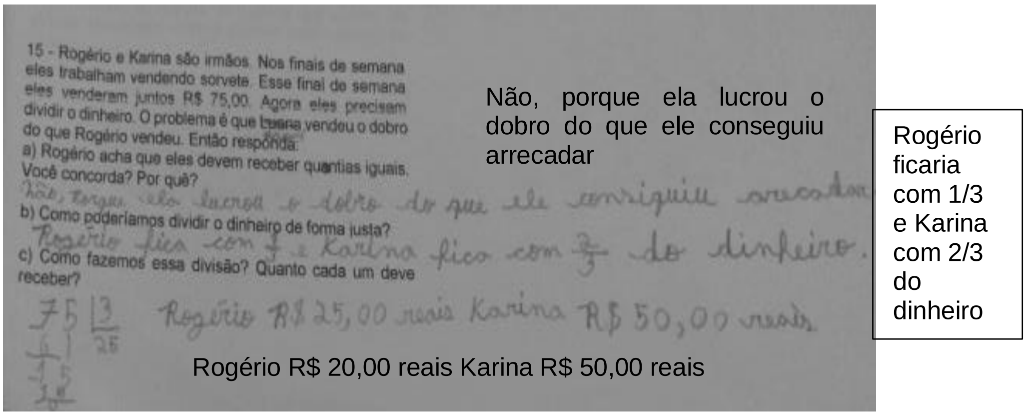
Todos os grupos acima entenderam que não era justo Karina receber a mesma quantia que Rogério, uma vez que tinha vendido mais; no entanto, não souberam como efetuar esta divisão proporcional, ora aumentando apenas 1 real no valor a ser recebido por Karina, ora dividindo o valor destinado a Rogério por 2 e repassando a Karina. Apenas dois grupos realizaram a divisão corretamente, dividindo o valor por 3 e repassando 2 partes a Karina, conforme vemos a seguir.

Figura 28 – Produção do aluno (questão 15-8)



Fonte: próprio autor (2018).

Figura 29 – Produção do aluno (questão 15-9)



Fonte: próprio autor (2018).

A dificuldade apresentada nestas questões deixa claro que o grupo ainda carece de atenção no que diz respeito ao entendimento de partes proporcionais e razão, conceitos estes importantes e que serão trabalhados na intervenção pedagógica. Diante disso, outro ponto de atenção a ser trabalhado na intervenção é a ideia de razão e proporcionalidade, e as relações matemáticas quando nos referimos a partes direta e inversamente proporcionais.

Ao finalizar a etapa de avalição diagnóstica podemos concluir que as dificuldades se concentraram, principalmente, no entendimento da relação de equivalência e nas questões relacionadas à proporcionalidade. Assim, a intervenção preparada seguiu este foco. Diante do que foi observado, na avaliação diagnóstica, é importante destacar dois momentos no ensino da álgebra: o desenvolvimento do pensamento algébrico, que deverá ser trabalhado nos anos iniciais até o sexto ano e a álgebra em si, cuja introdução se dá no sétimo ano dos anos finais. Finalizando, ressaltamos que, com a avaliação diagnóstica, identificamos algumas lacunas que foram o alvo da nossa intervenção. Além de trabalhar estas lacunas, iniciamos também a introdução ao estudo da álgebra, inserindo assim os conceitos de incógnita e variáveis.

Assim, a intervenção foi planejada a fim de promover o aprendizado do aluno dos seguintes conteúdos:

- Relação da igualdade e o equilíbrio entre os termos de uma igualdade;
- Padrões e sequências: regularidade e termos ausentes;
- Razões e proporcionalidade;
- Conversão da linguagem materna para a linguagem algébrica.

6.2 Da intervenção

Após a análise diagnóstica, encaminhamos para o primeiro módulo da intervenção, focando nas habilidades abaixo destacadas e que foram percebidas como lacunas existentes. Assim, percebeu-se a necessidade de serem mais bem trabalhadas. Cabe ainda destacar que as habilidades e as competências trabalhadas se relacionam com o planejamento do professor.

O conteúdo a ser trabalhado neste momento com os alunos teve por tema a álgebra, subdividindo-se no entendimento de letras e padrões, equações e as operações com letras além das balanças em equilíbrio. Após o estudo deste conteúdo, era esperado que os alunos conseguissem resolver e elaborar problemas representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = 0$, iniciando a compreensão da linguagem algébrica.

A intervenção foi planejada privilegiando a atitude investigativa do aluno, utilizando como estratégias de ensino: resolução de problemas, professor como mediador do processo, aprendizagem com o erro, uso de tecnologia, trabalho em grupo, jogo e a aproximação do contexto do problema com o cotidiano do aluno.

A cada passo da intervenção, destacaremos a habilidade relacionada à BNCC (Brasil, 2017) que estava sendo trabalhada e as estratégias utilizadas. Neste primeiro momento, a habilidade em destaque é:

> (EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas (BRASIL, 2016, p.301).

Para a realização deste módulo, foi prevista a utilização de duas ou três aulas. Os alunos foram divididos nos mesmos grupos trabalhados na avaliação diagnóstica e, para tornar a atividade mais agradável, foi proposto um jogo em que o professor insere um desafio na lousa e os alunos, após discussão, respondem em pequenas lousas após um tempo determinado, pontuando os grupos que conseguirem desenvolver o desafio. Destaco neste primeiro momento o trabalho em grupo, onde o aluno aprende com o conhecimento do colega, fazendo menção ao que coloca Vygotsky ao tratar da Zona de Desenvolvimento Proximal. É importante ressaltar também que o trabalho com o jogo desta forma não tem por ideia promover a competição, mas sim o trabalho em equipe, despertar a curiosidade e incentivar a investigação, motivando-os a encontrar as respostas que atendam o proposto. O objetivo do jogo é o entendimento do aluno sobre o significado do sinal de igualdade, a relação de equivalência e a ideia do equilíbrio dos termos, lacuna esta identificada anteriormente.

O primeiro momento da intervenção ocorreu no dia 23 de outubro de 2018. Os alunos se dividiram em 9 grupos de no máximo 4 alunos e, no mínimo, 3. Os alunos foram informados sobre a intervenção pelo professor:

> este é o primeiro momento da intervenção que havia comentado com vocês, sobre a álgebra, então será a nossa primeira aula de álgebra, e vamos iniciar trabalhando aquilo que foi percebido de dificuldade naquela avaliação que fizeram. Nosso objetivo neste primeiro momento é entender o sinal de igualdade.

Aos alunos foi explicado que iriam colocar cinco sentenças na lousa e que eles deveriam preencher os espaços em branco após discussão com seu grupo. As sentenças propostas foram:

$$11 + \square = 26$$
$$11 + 15 = \square + 11$$
$$11 + 15 = 12 + \square$$
$$11 + 15 = \square + 16$$
$$11 + 15 = \square + 17$$

Após observar as respostas dos alunos, pode-se perceber que apenas um dos nove grupos apresentou dificuldade, não respondendo as sentenças corretamente. Após responderem, os alunos passaram a socializar seus entendimentos com a mediação do professor, durante a mediação é fundamental permitir que os próprios aluno cheguem as suas conclusões com intervenção mínima do mediador, aproveitando as falas dos alunos para apresentar alguns métodos de resoluções e convenções.

Ao iniciar as considerações, o professor afirmou: “o objetivo desta atividade é entender a função do sinal de igualdade”. Os grupos foram então sendo indagados, a fim de entender a forma de resolução. Foi perguntando ao G1 sobre a primeira resposta, o aluno G1-G argumentou que respondeu: “15”. Confrontado sobre como chegou à resposta, ele afirmou: “fiz 11 menos 26”, corrigindo-se após intervenção do aluno G5-N, que disse: “não”. Assim, o aluno G1-G disse “26 menos 11”.

A resposta do aluno forneceu um subsídio importante para tratar de dois assuntos relevantes: o primeiro, acerca da propriedade comutativa, na qual a ordem das parcelas não altera a soma, não aplicável na subtração e o segundo acerca da utilização da operação inversa, muito utilizada na álgebra. Cabe observar que o grupo se utilizou da operação inversa para obter o resultado e que não houve intervenção do professor no levantamento desta hipótese.

Acerca da segunda sentença, o G3, ao ser questionado, explicou: “eu vi que a soma de um lado dava 26 e assim eu vi que do outro lado também tinha que dar 26; ai eu pensei que número mais 11 dá 26”. Nesta sentença, e de acordo com a colocação do grupo, foi relevante discutir a ideia de equivalência, cujo sinal é o de igualdade, sendo que um lado da igualdade deve ser equivalente ao outro. Nesta sentença, 11 + 15 = ? + 11 o grupo G2 respondeu 26, não observando a ideia de equivalência, mas sim a de identidade, como em 11 + 15 = 26. O momento foi propício para alertá-los acerca desta falha de procedimento. O aluno G4-J fez uma colocação relevante: “professor, eu ia colocar 26, mas aí eu pensei o que que aquele 11 está fazendo ali do lado”, investigando a sentença. O professor aproveitou a oportunidade para enfatizar a importância desta investigação: “é este questionamento que você tem que fazer quando se deparar com uma sentença. É importante observar tudo aquilo que é proposto, questionando e criando hipóteses sobre suas respostas”.

Na terceira sentença, 11 + 15 = 12 + ?, o grupo G5 afirmou que a resposta seria “14”. A aluna G5-N disse: “a gente somou ali e deu 26 e aí 12 mais quanto dá 26”. Indagados se alguém teria pensado diferente, o aluno G9-V disse: “eu pensei que se subir um no 11 indo pra 12, no 15 iria diminuir um indo pra 14”. Esta colocação foi fundamental para explorar a ideia de equilíbrio como se fosse uma balança. Cabe salientar que a ideia do equilíbrio é de extrema importância para a álgebra e que todas as hipóteses foram levantadas pelos alunos, levantando igualmente diversas possibilidades de resolução, ampliando assim o seu conhecimento consequentemente. Ao socializar o conhecimento dos colegas, cabe ao professor apenas agir como mediador, validando as hipóteses.

As demais sentenças foram respondidas utilizando as ideias já expostas anteriormente. Seguimos então para a segunda atividade, que serviria como uma consolidação daquilo que foi trabalhado e uma avaliação do entendimento dos alunos. Foram então propostas mais cinco sentenças semelhantes às anteriores.

$$\square = 15 + 11$$
$$11 + \square = 11 + 15$$
$$14 + \square = 11 + 15$$
$$\square + 12 = 11 + 15$$
$$\square + 13 = 11 + 15$$

Observando as respostas, pode-se perceber que os alunos acertaram as sentenças e mesmo o grupo que havia apresentado maior dificuldade agora conseguira acertar. Durante a discussão das respostas dos alunos, constatamos o entendimento da função da igualdade, e as diversas estratégias utilizadas pelos grupos na resolução das sentenças, ora empregando a ideia de operação inversa ora resolvendo cada lado da igualdade à procura de semelhança, bem como a utilização da ideia de equilíbrio, entendendo que, se de um lado eu somo uma unidade, do outro também tenho que somar.

Para finalizar, na primeira aula da intervenção foram propostas aos alunos sete sentenças e os alunos deveriam analisar e apontar a sentença como falsa ou verdadeira.

$$57 + 23 - 23 = 57 + 45 - 45$$
$$24 + 9 - 9 = 23$$
$$41 + 1 = 42 + 19 - 19$$
$$20 - 20 + 77 = 78 - 1$$
$$64 = 65 + 1 - 1$$
$$15 + 7 = 15 + 5 + 2$$
$$46 - 16 = 46 - 6 - 10$$

Dos 9 grupos, 6 grupos acertaram todas as sentenças; 1 grupo acertou 6 e 2 grupos acertaram 4. Indagados acerca da forma de resolução, o G5-N afirmou: “o 23 eu cortaria os dois e ficaria 57 e do outro lado da sentença eu cortaria o 45”. Assim, o grupo chegou à conclusão de que a sentença era verdadeira. Acerca da segunda sentença, o aluno G9-V afirmou: “a gente fez 24 mais 9... 9 menos 9 é igual a 0, aí ficaria 24 e 24 não é igual a 23”. Todos os grupos foram percebendo a eliminação dos números opostos e demonstraram entender esta ideia.

Ao finalizar o primeiro o dia, pudemos avaliar positivamente após observar as respostas dos grupos diante das sentenças propostas, constatamos que as atividades permitiram que os alunos participassem, expondo suas respostas, dúvidas e acertos. Assim, ao mesmo tempo que desenvolveram uma atitude investigativa, aprenderam conceitos importantes como equilíbrio, operação inversa, propriedade comutativa e o significado do sinal de igualdade. Observamos aquilo que Milies (2004) colocou que a passagem da álgebra clássica para a abstrata é um processo interessante, pois amplia o campo de atuação do aluno, mudando a concepção matemática em relação a sua condição de ciência independente e a evolução do método de trabalho.

No segundo dia da intervenção, a habilidade trabalhada foi a seguinte: “(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo” (BRASIL, 2016, p. 301).

Os alunos foram novamente divididos em grupos e a eles foram propostas as situações abaixo. Antes da proposta, o professor resgatou as ideias trabalhadas no dia anterior, reforçando a noção de equivalência e da igualdade e deixando claro o objetivo da aula, ao afirmar: “nesta aula, nosso objetivo é entender a ideia de proporcionalidade. Vocês receberão a proposta e deverão discutir junto a seu grupo para socializar logo após”. Assim, a questão proposta foi:

Questão – Maria pintou as paredes de sua sala com uma cor que criou, misturando as cores amarelo e verde. Para cada 2 doses de amarelo, juntou 3 doses de verde.

a) Se a Maria colocar num recipiente 45 doses de verde, quantas doses de amarelo deverá juntar para obter a cor que criou?

b) Se a Maria colocar num recipiente 14 doses de amarelo e 15 doses de verde, obtém a cor com que pintou as paredes da sua sala?

c) E se a Maria colocar num recipiente 18 doses de amarelo e 27 doses de verde, obtém a cor que inicialmente usou?

d) Se Maria utilizou ao todo 100 doses das tintas, quantas seriam de amarelo e quantas seriam de verde?

Nesta segunda proposta destacamos a contextualização do exercício, aproximando um pouco da realidade do aluno, uma vez que a possibilidade de muitos já terem observado alguém pintando uma casa é grande ou mesmo a percepção de que as paredes da casa podem ser pintadas de cores variadas. Destacamos ainda outras estratégias utilizadas como o trabalho em grupo, resolução de problemas, mediação e aprender com erros.

Após a apresentação da proposta, os alunos tiveram o momento de discussão em grupo, elaborando assim suas hipóteses de resposta. Em seguida, passamos à socialização com a mediação do professor.

O professor efetuou a leitura do contexto do exercício juntamente com os alunos, em seguida passou a questionar os grupos. No grupo 1, ao ser indagado, o aluno G1-G afirmou: “nós pegamos o 45 e dividimos por 2 que deu 27,5 e depois somamos 45 que deu 67,5”. O professor então perguntou à sala se alguém teria respondido diferente. A aluna G5-A explicou: “a gente pensou no 3 pra chegar no 45; o que acontecia multiplicava por 15, aí então pensamos no 2 multiplicado por 15, que é igual a 30”. Neste momento, coube destaque do professor acerca da utilização de fração equivalente para a resolução do problema, conteúdo trabalhado no ano corrente. Convém ainda observar que o primeiro grupo, embora tenha desenvolvido o exercício a partir de sua própria lógica, encontrou-se distante da lógica matemática para a resolução deste primeiro item.

A classe foi indagada se alguém teria utilizado alguma outra estratégia, podendo-se perceber que alguns grupos demonstraram a linha de raciocínio, mesmo que incoerente com a questão, mas que justificava suas respostas. Por exemplo, o Grupo 2 respondeu “44” e justificou: “nós percebemos que de 2 para 3 tem a diferença de 1, então nós tiramos 1 de 45”. Foi dada oportunidade para que os colegas apontassem onde os demais grupos estavam falhando, com o objetivo de permitir aos alunos que aprendessem com os erros cometidos. A ideia de razão e proporção, embora trabalhada durante o ano, ainda se mostra como um grande desafio para a sala, na qual de 9 grupos apenas 4 chegaram às repostas.

Na socialização do segundo item, a ideia era verificar se a cor era obtida na proporção de 14 para 15. O grupo 3 afirmou que “sim” e justificou com a diferença existente de 14 para 15 e de 2 para 3. O grupo 2 também justificou que “sim” pelo mesmo motivo. O grupo 9 respondeu que “não” e G9-W justificou: “Não, porque se eu dividir 14 por 2 dá 7 e se eu multiplicar 7 por 3 dá 21 e não 15”. O grupo 5 justificou utilizando a ideia de fração equivalente. Nesta questão 4, 9 dos grupos apresentaram a resposta correta com consistência. Alertou-se aos grupos que olhar somente a diferença não confirma a proporcionalidade e que a regra de três seria uma opção para resolução.

No item 3, esperava-se que, com as mesmas estratégias utilizadas no item anterior, os alunos chegassem à conclusão de que, na proporção 18 para 27, a tinta teria a mesma cor que a inicial. O grupo 1 afirmou que “não”; no entanto, não soube justificar. Embora exista uma razão para a resposta, muitas vezes, os alunos se sentem envergonhados em se expor; insistir que o aluno justifique a resposta pode não ser a melhor estratégia no momento, pois pode fazer com que na próxima oportunidade se exima de responder. Cabe ao professor observar o momento oportuno de perceber a razão da resposta. O grupo 4 respondeu que “sim” e justificou que realizou a contagem manualmente: se de 2 em 2 chegaria a 18 e de 3 em 3 chegaria a 27. O grupo 7, que também respondeu “sim”, justificou afirmando que ao dividir 18 por 2 e 27 por 3 obtinham o mesmo número. Neste item, 5 grupos chegaram à conclusão correta.

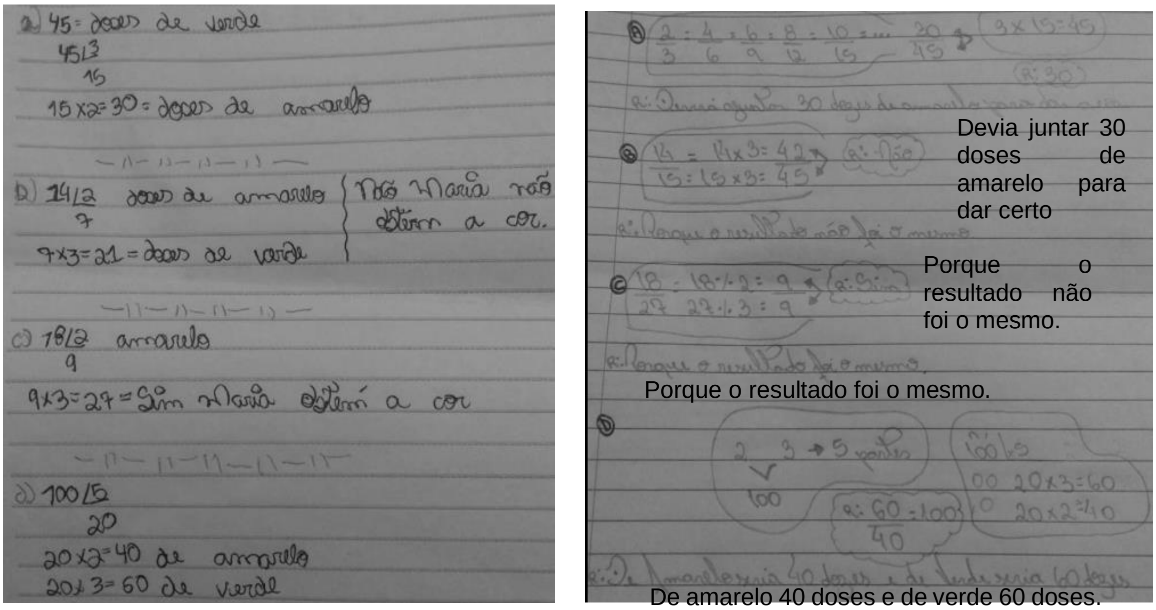
O último item exigia dos alunos a ideia do todo. O grupo 2 manteve a linha de raciocínio da diferença, respondendo 51 e 49. O grupo 1 também não chegou à conclusão correta, afirmando que dividiu 100 por 3 e que teria dado 33,3, alegando ser a parte da cor amarela. O grupo 9 afirmou 42 e 58, pontuando que teriam feito uma tabela de multiplicação de 2 de amarelo e 3 de verde e foi continuando. O grupo 5 afirmou: “40 doses de amarelo e 60 de verde”, afirmando a utilização da fração equivalente. Neste item, somente um grupo chegou à conclusão correta.

Após este segundo momento, podemos perceber a grande dificuldade da classe em entender a proporcionalidade, apontando que esta habilidade precisa ser mais trabalhada em aulas posteriores para não se tornar um grande obstáculo quando do entendimento da álgebra. No entanto o momento de aprendizagem foi grande, pois os alunos apresentaram estratégias de resolução variada como a utilização de fração equivalente, divisão proporcional, regra de três, bem como a possibilidade de no erro aprender.

O professor também chegou à conclusão de que a intervenção deste dia poderia ter sido mais bem aproveitada se, após a resolução de cada item, os grupos socializassem as respostas. Assim, os demais grupos teriam a oportunidade de utilizar os conceitos aprendidos na questão seguinte.

Uma vez finalizada esta etapa da intervenção, a fim de se verificar a aprendizagem dos alunos, solicitou-se aos alunos que respondessem novamente a atividade, utilizando os conceitos aprendidos com a socialização das respostas dos colegas. Veremos agora como ficaram algumas produções:

Figura 30 – Produção dos Grupos 2 e 3

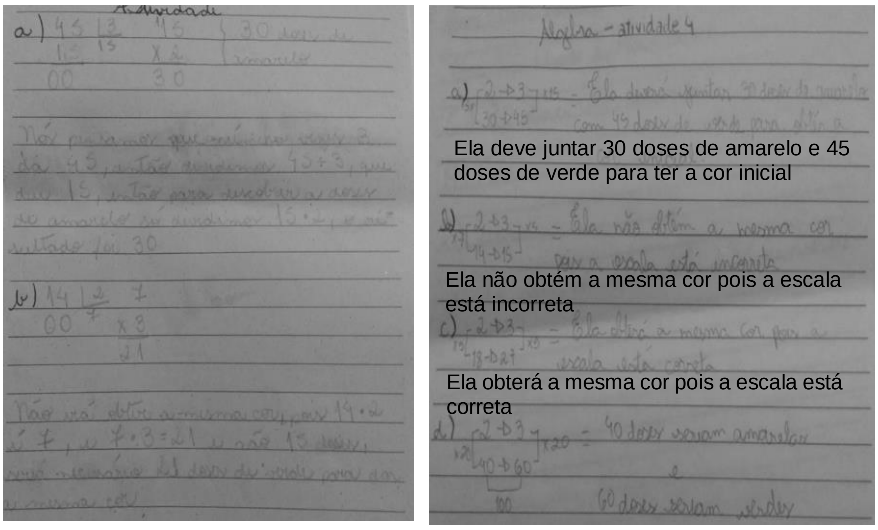


Fonte: próprio autor (2018).

Figura 31 – Produção dos Grupos 4 e 5

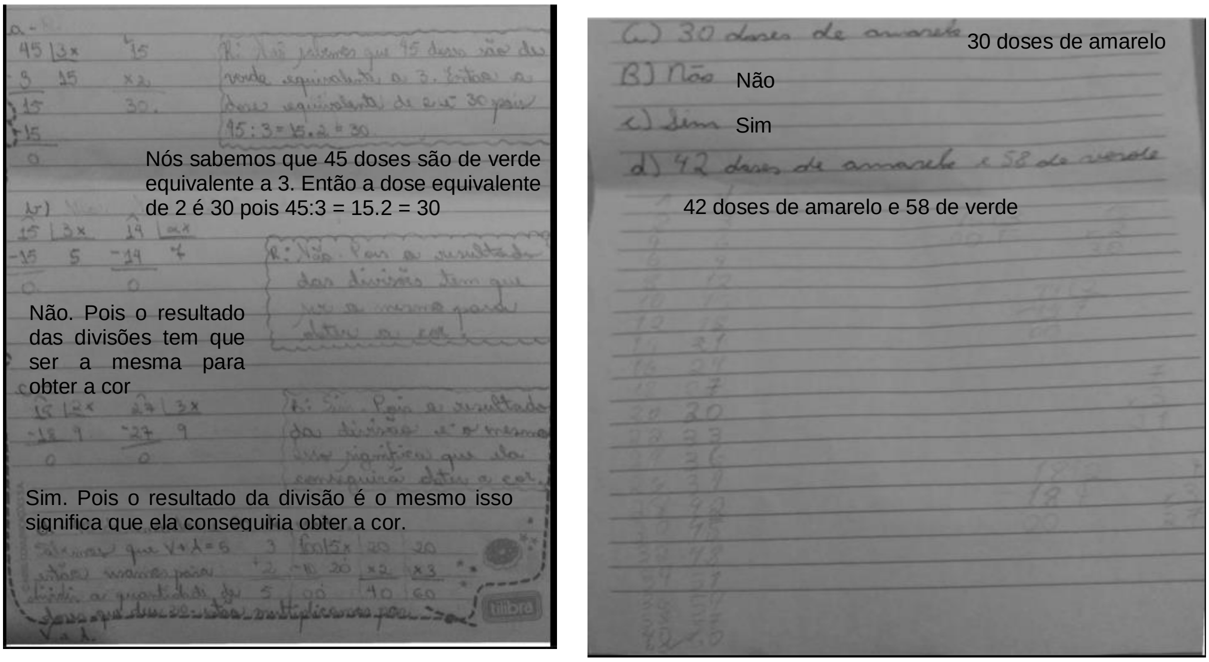
Nós pensamos que número vezes 3 dá 45, então dividimos 45 por 3 que deu 15, então para descobrir doses de amarelo dividimos 15.2 e o resultado foi 30

Não irá obter a mesma cor, pois 14:2 é 7 e 7.3=21 e não 15 doses, seria necessário 21 doses de verde para dar a mesma cor.



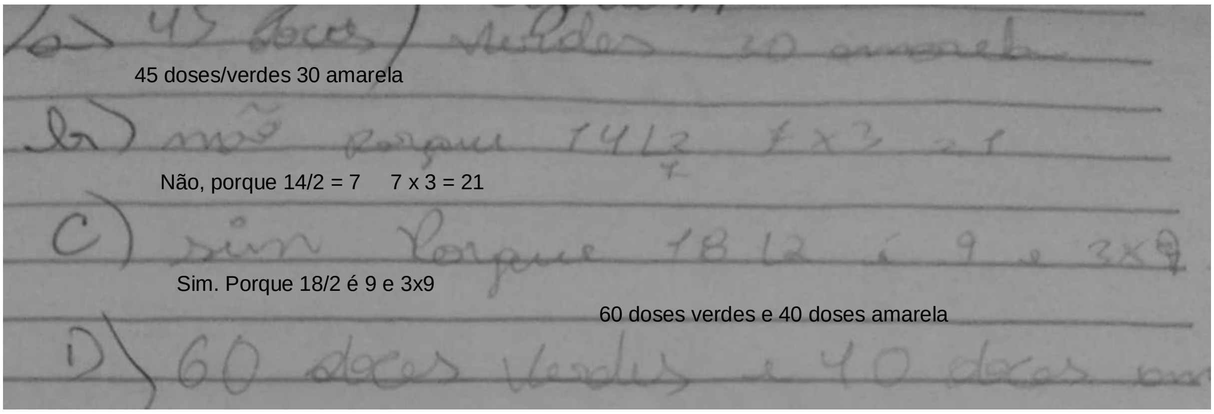
Fonte: próprio autor (2018).

Figura 32 – Produção dos Grupos 7 e 9



Fonte: próprio autor (2018).

Figura 33 – Produção do Grupo 6



Fonte: próprio autor (2018).

Podemos observar que a discussão em grupo, após o momento de investigação, das situações-problema, os grupos conseguiram expressar as respostas corretamente. Desse modo, podemos avaliar as estratégias utilizadas neste dia positivamente.

No terceiro momento da intervenção, passamos a entrar efetivamente no campo da álgebra. Para isso, optamos inicialmente por contextualizar uma situação-problema:

Professor: um adolescente chamado Zeca está com um problema a resolver, que seria o tamanho que deveria cortar um pedaço de madeira para fazer 2 prateleiras, cuja soma tem 97 centímetros e a prateleira de baixo mede um centímetro a mais que a de cima.

. A fim de chamar a atenção dos alunos, foi exibido um vídeo,[3] contextualizando a situação acima. Durante sua exibição, o professor da classe realizou algumas intervenções, com o objetivo de fazer com que a classe pensasse no assunto e

[3] O vídeo selecionado faz parte do Telecurso 2000. Foi escolhido por tratar do tema "introdução à álgebra", contextualizando-se com uma história próxima à realidade dos alunos, tornando assim o assunto interessante para o aluno e despertando sua curiosidade. No vídeo, Zeca é um adolescente que ajuda em uma marcenaria e, por causa de uma atividade na escola, precisa cortar 2 prateleiras, sendo uma um centímetro menor que a outra e para isso pede ajuda a seu amigo.

elaborasse suas respostas. Destacamos nesta atividade as estratégias: resolução de problemas, mediação do professor, contextualização e recursos digitais.

Na primeira interrupção feita no vídeo, o professor questionou: “se a primeira prateleira foi chamada de “x”, como deveríamos chamar a prateleira de baixo?”

Os alunos começaram a criar hipóteses e tendiam a chamar a prateleira de baixo por outra letra, “y”, por exemplo, ou até mesmo pela mesma letra “x”. O momento propiciou ao professor oportunidade de mostrar aos alunos que a princípio deveríamos evitar o uso de outra letra, pois, para chegar a uma solução, iríamos precisar de duas equações. O professor também fez com que os alunos pensassem acerca de chamar a segunda prateleira também de “x”, pois assim estaríamos supondo que as duas prateleiras teriam o mesmo tamanho, o que todos concordaram que não era verdade. Os alunos continuaram a criar hipóteses:

> G9-V – “É uma maior e menor que a outra; então é uma letra maior e menor que a outra x, y”.
> G5-N – “X mais, x menos”.
> G5-A – “X mais x mais 1”.

Neste momento, o professor percebe que as hipóteses começam a ganhar maior consistência e incentiva a melhorarem suas respostas. O professor então afirma: “G5-A, entendi sua colocação, mas vamos tentar melhorar só a prateleira de baixo. Como é que eu chamo?”. A classe fica pensativa e o professor insiste: “O que eu sei da prateleira de baixo”, e a classe responde “que ela é um centímetro maior que a outra”. O professor diz “então?” e o aluno G2G responde que “x mais 1”. O professor consente: “isso, x + 1”.

Este momento é muito importante, pois a criação de hipóteses por parte dos alunos e o senso investigativo permitem facilitar o momento de aprendizagem dos alunos. Neste sentido, o PCN já indicava: “a sociedade atual carece de cidadãos pensantes, pró-ativos, com espírito investigativo e capazes de solucionar problemas, intervindo de forma autônoma e crítica em situações adversas” (BRASIL, 1998, p. 21).

É pensando nesta sociedade que o professor não deveria oferecer respostas prontas, mas incentivar os alunos rumo a este pensamento investigativo, colocando suas ideias e possibilidades para discussão em grupo. Assim, o conhecimento de todos seria ampliado.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que investigar é descobrir relações entre os objetos, processo no qual aquele que investiga não dispõe de uma resposta imediata, mas o faz a partir de seus conhecimentos prévios, sentindo-se motivado a encontrar uma resposta. Os autores dividem a investigação em quatro estágios.

> O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e à avaliação do trabalho realizado (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 20).

Podemos perceber alguns destes momentos, como, por exemplo, o reconhecimento da situação após o vídeo apresentado e a proposta realizada pelo professor sobre o tamanho em que Zeca deveria cortar a prateleira.

Em seguida, incentivados pelo professor, os alunos realizam suas conjecturas. Então, são motivados a realizar eventuais testes de refinamento. Isso é bem observado nos diálogos acima.

Na segunda interrupção realizada no vídeo, os alunos foram indagados como montariam a equação, pensando em uma balança que, de um lado, tem 8 pesos de um quilograma e do outro lado 2 pacotes de farinha com a mesma massa e um peso de 2 quilogramas.

A seguir, podemos observar que, indagados, os alunos continuam criando suas conjecturas, embora com alguma dificuldade, o que é considerado normal quando se fala em investigação, uma vez que não existe resposta imediata. No entanto, a forte influência da aritmética faz com que os alunos tendam a buscar uma resposta, que seria o peso do saco de farinha. O professor então questionou:

> Professor – Nosso objetivo é criar uma equação que represente esta situação: cada lado da balança é um dos membros da equação de um lado o que temos.
> Classe – Oito.
> Professor – E do outro?
> G9-V – Dois sacos que você não sabe e mais dois.

> Professor – E este que não sei como devo chamar?
> G5-N – De x mais.
> Professor – Mas eu só tenho um x?
> Classe – Tem dois.
> G4-J – Eu ponho dois x?
> Professor – X mais x é igual a 2x.

O momento é oportuno para indicar aos alunos como realizar a soma quando existem letras envolvidas. Assim, a classe conseguiu equacionar 2x + 2 = 8. Na sequência o professor propôs a seguinte situação-problema:

Zeca não recorda quanto deve a seu amigo. Ele sabe que o dinheiro que pegou emprestado deu 100 reais para sua mãe, metade do que sobrou deu a seu pai para consertar o carro e ainda lhe restaram 80 reais. A partir da situação-problema:

a) Transforme a situação em uma equação.
b) Resolva a equação com a ideia de equilíbrio ou outra estratégia.

É proposta neste momento uma situação em que os alunos se deparam com um problema e precisam resolver sem a intervenção do professor. Este momento de formulação de hipóteses é fundamental para a aprendizagem dos alunos. Segundo Brousseau:

> Uma boa reprodução pelo aluno de uma atividade científica exige que ele aja, formule, prove, construa modelos, linguagens conceitos, teoria, troque-os com outros, reconheça aqueles que são conformes à cultura, retire destas aquelas que lhe são úteis (...) (BROUSSEAU, 1996a, p. 37-38).

O objetivo neste momento não é que o aluno formule a resposta corretamente, mas que construa seus modelos e linguagens com o objetivo de gerar desequilíbrio em suas estruturas mentais para futura assimilação e acomodação.

É importante que o professor permita ao aluno este momento; no entanto, é igualmente importante destacar que os alunos demonstram insegurança, pois infelizmente são poucas as oportunidades em que são colocados em situações semelhantes, uma vez que os professores tendem a pular esta etapa, sendo isso inclusive uma constatação do próprio Brousseau, o qual explica que, sendo professor, “é grande a tentação de pular estas duas fases e ensinar diretamente o saber como objeto cultural, evitando este duplo movimento. Neste caso, apresenta-se o saber e o aluno se apropria dele como puder” (BROUSSEAU, 1996b, p. 49).

O duplo movimento a que Brousseau se refere se resume ao ciclo entre contextualizar e descontextualizar. Primeiramente, o professor deve conferir significado ao assunto tratado, contextualizando-o, e em seguida ajudar os alunos a descontextualizar, de modo a tornar as produções universais.

Na intervenção, os alunos tiveram aproximadamente 20 minutos para entender a situação que foi contextualizada para posteriormente efetuar o movimento inverso, tentando transformar a situação em uma equação. Após o tempo estipulado, passamos a ouvir os alunos acerca de suas conclusões. Neste momento, ainda não se esperava dos alunos que conseguissem equacionalizar o problema com efetividade, mas que apresentassem alguns indícios da utilização do pensamento algébrico ao transformar a situação-problema em equação. Neste sentido,

> a resposta inicial que o aluno pensa frente à pergunta formulada não [deve ser] a que desejamos ensinar-lhe: se fosse necessário possuir o conhecimento a ser ensinado para poder responder, não se trataria de uma situação de aprendizagem (op. cit.).

Primeiramente, o professor colocou: “Gostaria de saber quais os grupos que chegaram a alguma equação?”. Surgiram algumas conjecturas como as seguintes:

> Grupo 1 – 100 + x + 80.Grupo 9 – 100 + x = x e x/2 = 80 e 80.2 + 100 = 260.
>
> Grupo 5 – 100 + 80.2 = x.
>
> Grupo 2 – (100-80)/2.
>
> Grupo 3 – 100 + x = 180 e 80 + x = 120.

Embora nenhum dos grupos tenham chegado a uma equação aceitável diante da situação proposta, o pensamento abstrato começa a surgir, uma vez que algumas das proposições colocadas faziam sentido. O professor então passou a realizar juntamente com os alunos uma análise daquilo que foi produzido inicialmente, fazendo os alunos pensarem o que era ou não uma equação diante das propostas.

> Professor – O proposto pelo grupo 1 é uma equação?
> Classe – É.
> G5-N – Não, porque não tem o igual. (o aluno conseguiu identificar que a ausência da igualdade faz com que a expressão deixe de ser uma equação).
> Professor – O proposto pelo grupo 9 é uma equação?

> Classe – Sim.
> Professor – Certo.. .e o proposto pelo grupo 4?
> Classe – É.
> Professor – E o que o grupo 2 propôs?
> Classe – É.
> G5-A – Não é não, professor!!!
> Professor – E por que não?
> G5-A – Porque não tem x.

É importante a colocação do aluno, ao perceber que a ausência da incógnita descaracteriza a equação. Diante das colocações dos alunos, percebeu-se que alguns grupos buscaram a resposta na aritmética, outros conseguiram chegar próximo de uma equação, no entanto ainda tentando fazê-la partindo do resultado. Na sequência da aula, o professor, juntamente com a sala, passou a buscar a equação. Uma situação que se notou é que os alunos definiam a incógnita sem pensar o que ela representa. Isto pode ser observado no diálogo seguinte.

> Professor – Quem é x na equação proposta pelo grupo 9: 100 + x = x?
> G9-V – Um número.
> Professor – É um número, mas que número?
> G6-J – 80.
> Professor – Se eu tenho um número definido, não há a necessidade de equacionar. Vocês precisam determinar o que representa x nesta equação.
> G1-A – É o valor que a gente não sabe o resultado?
> Professor – Sim, mas por mais que a gente não saiba o resultado, ele precisa representar algo, por exemplo, é o que ele emprestou para a mãe, é o que emprestou para o pai?
> G1-V – É o que emprestou para o pai.
> Professor – Ok, então x é o que ele emprestou para o pai. Então, nesta equação 100 + x = x, estamos dizendo que o que ele emprestou para a mãe mais o que ele emprestou para o pai é igual ao que ele emprestou para o pai?

Quando o professor coloca a situação acima, os alunos percebem que tem algo “falhando” em sua representação. O objetivo com tais indagações é criar o desequilíbrio no aluno, a fim de causar assimilação daquilo que está sendo trabalhado. O aluno passa também a ampliar seu campo de hipóteses quando começa a fazer a leitura algébrica.

> Professor – Vamos agora observar esta segunda equação proposta pelo grupo 9: x/2 = 80. Quem é o “x” neste caso, ainda é o que ele emprestou para o pai?
> G9-W – Não, é o que sobrou depois que emprestou para mãe.
> Professor – Então, lembra que vocês colocaram esta outra equação como complemento, então o “x” pode ser o que emprestou para o pai nesta primeira equação e outra coisa nesta segunda, se estão relacionadas?

Percebe-se que os alunos acabam tendo dificuldade, primeiro em definir quem representa o “x” e depois em manter esta representação, motivo que nos leva a admitir a necessidade de trabalhar outras situações até que este entendimento seja claro.

Analisando junto com a classe a equação proposta pelo grupo 5: 100 + 80.2 = x, podemos perceber que ela está bem estruturada, uma vez que buscou outra informação contida no texto, o valor que restou, e trabalhou com a operação inversa. Ao explicar a equação, o aluno G5-N afirmou: “é por que o exercício induz a gente a pensar que o que sobrou ele deu pro pai, e ainda lhe sobraram 80 reais, então 80.2 é o que sobrou mais o que ele deu para o pai e o x é o que ele deve”.

O pensamento do aluno está correto, no entanto ainda se percebe em suas colocações uma mistura do pensamento algébrico e a aritmética. A álgebra nos induz a tentar encontrar uma forma de representar o que ele emprestou para o pai sem se preocupar com o valor que sobrou, no caso 80. É importante salientar que este grupo definiu bem o que representa o x.

O professor propôs para a classe pensar nesta representação: “vamos pensar em uma forma de representar o que ele emprestou para o pai”. Para tentar estruturar as ideias, foi proposta a criação de uma tabela.

> Professor – Vamos tentar equacionar então, ele pegou dinheiro emprestado, certo, como podemos chamar este?
> Classe – De x.
> Professor – Ok, vamos então chamar de x e o dinheiro que emprestou para mãe.
> Classe – 100.
> Professor – Tranquilo, agora vamos tentar representar o que ele emprestou para o pai.
> G9-L – y.
> Professor – Vamos tentar neste momento ainda não envolver uma outra letra, mas tentar relacionar com a letra que temos.
> G5-N – 2x.
> Professor – e então, ele emprestou para o pai o dobro do que pegou emprestado?
> G5-N –Não.

Os alunos passaram a criar hipóteses. Este momento de investigação é relevante e, mesmo que levem um tempo, os alunos estão trabalhando seu pensamento lógico-abstrato. Depois de algumas possibilidades, o aluno G7-I disse: “x - 100 dividido por 2”. Então, o professor perguntou: “faz sentido o que a colega falou?”.

A classe concluiu que fazia sentido o que a colega disse. Questionada como ficava a equação, a classe não teve dificuldade em concluir, sendo que o professor achou, por bem, deixar a forma de resolução para momentos posteriores. A Classe então respondeu: “x = 100 + (x-100)/2 + 80”.

A quarta parte da intervenção teve por objetivo trabalhar a percepção e o entendimento dos alunos na identificação de padrões e sequências, observando as regularidades, e percebendo o comportamento da sequência. Entender sequências é fundamental para a resolução de diversos exercícios algébricos. A proposta foi a seguinte:

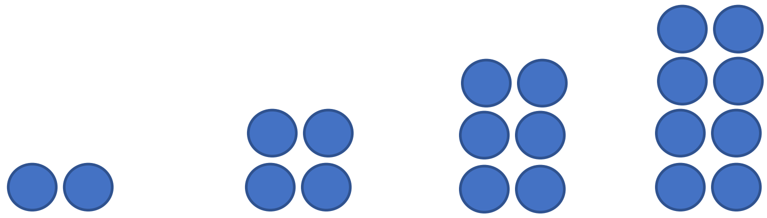


FIGURA 1 FIGURA 2 FIGURA 3 FIGURA 4

Questão – Observe a sequência e responda:

a) Qual o padrão que relaciona a quantidade de bolinhas e o número da figura?

b) Mantendo o padrão, quantas bolinhas terá a figura 5? E a figura 8?

c) Quantas bolinhas teremos na figura 50?

d) Representando pela letra “p” a posição da figura e pela letra “n” o número de bolinhas, conseguimos escrever uma sentença matemática que represente esta sequência?

No momento em que os alunos se preparavam para responder, já surgiam algumas dúvidas. Estes questionamentos os ajudam a exercer seu senso de investigação.

> G3-G – Professor, não entendi a terceira pergunta.
> G9-V – Figura 5 e figura 8, professor?
> G9-L – Sequência que represente?
> G6-G – Professor, não entendi a 3.

É importante não oferecer aos alunos as respostas prontas, mas permitir a discussão em grupos das hipóteses de cada um. Os alunos algumas vezes possuem dificuldades, porque estão acostumados a obterem as respostas sem exercer seu pensamento. Diante das dificuldades, o professor mediador do processo vai dando algumas informações relevantes. Por exemplo, foi dito à turma: “assim, vamos dar alguns nomes para aquilo que precisamos, então o número de figuras em cada posição vamos chamar de ‘n’ e a posição chamaremos de ‘p’”.

Após o momento em que os alunos conversavam entre si, a fim de chegarem a possíveis respostas, o professor passou a socializar o que foi produzido.

> Professor – Pessoal, então no exercício foi dada uma sequência numérica, que, embora ainda não estejamos falando de álgebra, o entendimento dela é importante para o seguimento do tema. Nesta sequência, que padrão que se percebe?
> Classe – Aumenta 2.
> Professor – E o que mais? Tem alguma outra relação que vocês perceberam?. (Foi observado que o entendimento do que é padrão para a sala está claro, uma vez que não se percebeu qualquer questionamento neste sentido).
> G5-W – O número de bolinhas é a posição vezes 2.

Observa-se que o aluno conseguiu concluir qual é a relação correta na sequência, sem que o professor falasse diretamente. Mesmo depois da conclusão do aluno, alguns alunos ainda diziam que nunca iriam chegar a esta conclusão. O que nos leva a pensar o quanto o aluno se limita, não sabendo a capacidade que possui e, muitas vezes, não acreditando em si.

Indagados, no entanto, sobre quantas bolinhas existiam na posição 5 e na posição 8, a classe respondeu corretamente. Aproveitou-se a situação para questionar em que posição havia 30 bolinhas? A classe demonstrou alguns segundos de silêncio, pois a pergunta desestabilizou a sequência de pensamento, mas logo alguém conseguiu concluir. A aluna G5 -A disse que na “figura 15”. O professor então perguntou: “Quando mudei a pergunta que operação estamos trabalhando?” e a classe concluiu que era na operação inversa.

O conceito de operação inversa tem se tornado claro para a classe, e será muito utilizado quando da resolução de equações futuramente. O professor afirmou que: “se chamarmos a posição de ‘p’ e o número de bolinhas de ‘n’, qual a equação que podemos montar que respeite esta sequência?”. A classe passou novamente a criar hipóteses, mas logo um dos alunos propôs a sequência correta afirmando:

> G4-M – $p.2 = n$.
> Professor – Vamos verificar se a sentença é verdadeira: na posição 1, temos 1.2, que é igual a 2; na posição 2, temos $2.2 = 4$, isso é verdade?
> Classe – Sim.

O momento se tornou propício para apresentar algumas convenções, como a não obrigatoriedade de aparecer o sinal de multiplicação quando multiplicamos um número por uma letra, além de que o número normalmente deve ser inserido na frente da letra. Assim, em vez de escrevermos $p.2 = n$, poderíamos escrever $n = 2p$. Apresentar as convenções para os alunos é de fundamental importância, pois em problemas futuros se encontrarão situações semelhantes. O professor também comentou que, ao encontrar a sequência, estamos generalizando, um dos objetivos gerais da álgebra.

Neste quinto momento, o objetivo previsto em nosso planejamento o é de permitir ao aluno que resolva e elabore problemas os quais possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = 0$, iniciando a compreensão da linguagem algébrica. Com o foco nesta compreensão da linguagem algébrica, o professor primeiramente explicou a importância de converter um problema que se encontra na linguagem materna para a linguagem matemática, em especial, a linguagem algébrica.

Foram propostas oito sentenças e os alunos deviam coletivamente pensar e um deles se propor em ir à lousa e responder. Segue abaixo as sentenças propostas e o comportamento da sala. Permitir que o aluno vá a lousa para expressar suas ideias também é uma estratégia de ensino, pois tanto o professor quanto os alunos têm a oportunidade de observá-lo desenvolvendo sua resposta. Além disso, pensando na formação integral do indivíduo, o aluno desenvolve sua autonomia ao enfrentar receios como o de se expor para todo grupo.

A primeira sentença proposta foi 2 somado a 5. Lembrando que a comanda seria escrever a sentença em linguagem matemática. Após alguns minutos pensando, o aluno G2-G escreveu na lousa $2 + 5$, acertando a sentença. Na sequência, a proposta foi o triplo de 4; o aluno G5-A escreveu 4×3. O professor então perguntou se estava correto e a classe afirmou que sim, indagados se podiam melhorar disseram para tirar o x. É importante observar que o x na expressão significa multiplicação; no entanto, na álgebra devemos utilizar o ponto em vez do x, para não se confundir com a incógnita. Convém ressaltar que a própria classe se atentou para isso, demonstrando entendimento algébrico da situação. Eles também propuseram mudar a ordem, deixando 3.4, que, embora não mude o resultado, devido à propriedade comutativa da multiplicação, deixa a expressão matemática mais alinhada à sentença em língua materna.

Dando sequência à atividade, foi proposto: metade de 14; o aluno G7-G foi à lousa e escreveu 14:2. O professor então trabalhou no sentido de melhorar a forma de escrever, alinhando-se ao que comumente é utilizado na álgebra. A aluna G5-N propôs escrever em forma de fração 14/2. Até o presente momento foram trabalhadas sentenças aritméticas, alinhadas aos conceitos algébricos. Na próxima sentença, já podemos falar de sentença algébrica. Foi proposto: o dobro de um número, e o aluno G6-G escreveu x = 2. A classe já manifestou que aquilo estava errado em relação ao que foi proposto. O professor perguntou quem podia melhorar, e a aluna G4-J escreveu 2x; o aluno G9-L afirmou que faltava um ponto, representando a multiplicação e a aluna G5-N disse que não precisava aparecer o número.

Por fim, foi proposto certo número somado a 7 e um número menos 6. Os alunos que foram à lousa não apresentaram dificuldade em propor 7 + x; no entanto, a sala afirmou que podia ser melhorado, invertendo para x + 7. Quem foi à lousa escrever a última escreveu x - 6. O professor desafiou a sala a escrever a soma de 2 números diferentes. A aluna G5-N escreveu x + y; a sala afirmou que estava correto. Indagados se podia ser x + x, disseram que não, e o aluno G9-V disse que não, porque os números tinham que ser diferentes.

Após esta etapa, percebemos que os alunos estavam avançando no entendimento do que seria ter um pensamento algébrico. Eles compreendiam os conceitos e as notações, cujo conhecimento foi por eles mesmos construído e o papel do professor foi apenas o de mediador. É importante salientar que todas as atividades propostas buscavam no aluno o olhar investigativo, a possibilidade, por parte dos alunos, de que levantassem hipóteses e principalmente, por meio delas, fossem construindo conhecimento, num processo tanto individual quanto coletivo.

6.3 Avaliação da intervenção

Trata-se da última etapa da intervenção, na qual iremos avaliar o conhecimento adquirido pelo aluno após todas as etapas anteriores, traçando um paralelo com o teste inicial. Neste momento, também descreveremos achados relativos à avaliação dos efeitos da intervenção pedagógica, identificando o que favoreceu as aprendizagens dos alunos, no que diz respeito ao processo de aprendizagem, se houve ou não facilidade no processo, observando os instrumentos de avaliação, bem como os achados relativos à intervenção propriamente dita, cujo objetivo é analisar e avaliar a intervenção, discutindo os pontos fracos e fortes, e as modificações realizadas durante o processo a partir de observações e reflexões.

O objetivo da intervenção foi trabalhar o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que os alunos se deparam com a introdução à álgebra sem alguns pré-requisitos importantes que facilitam o aprendizado dos alunos e minimizam o impacto causado quando da aparição de letras na matemática. Após este momento inicial da intervenção, foi dada continuidade às aulas previstas no planejamento anual do professor na introdução à álgebra. A fim de avaliar a aprendizagem dos alunos, foi solicitado ao final do trimestre que respondessem algumas atividades relacionadas ao tema. Teceremos alguns comentários sobre as atividades realizadas, traçando um paralelo com a avaliação diagnóstica.

Acerca da intervenção, a mesma ocorreu em cinco momentos. O foco da intervenção foi determinado após os resultados e as percepções obtidas na avaliação diagnóstica, o que ratificou aquilo que levantamos em nossas pesquisas, a dificuldade dos alunos no pensar algebricamente. Durante a intervenção foram utilizadas algumas estratégias de ensino, como o trabalho em grupo, a resolução de problemas, utilização de recursos tecnológicos, mediação do professor, o erro como forma de aprendizado e a contextualização, aproximando a proposta à realidade do aluno.

Na intervenção então, concentramo-nos no reconhecimento do sinal de igualdade, no entendimento de relações proporcionais, em situações didáticas que permitiram ao aluno o pensamento algébrico, no reconhecimento de padrões e sequências e na conversão da linguagem materna para a linguagem algébrica.

Cabe destacar que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), embora estabeleçam que, no decorrer dos trabalhos com os números, o aluno precisa ter os primeiros contatos com a álgebra, mesmo que ainda não se utilize de convenções, propondo inclusive que o ensino da álgebra venha acompanhado de recursos como jogos, gráficos e modelos, evitando procedimentos puramente mecânicos, dando ênfase ao trabalho com problemas e estimulando o aluno a dar significado às ideias e à linguagem matemática, não enfatiza em como isso deveria ocorrer. A BNCC (Brasil, 2017), por sua vez, foi mais enfática neste sentido, destacando o tema álgebra, sendo ele privilegiado desde o primeiro ano do Ensino Fundamental.

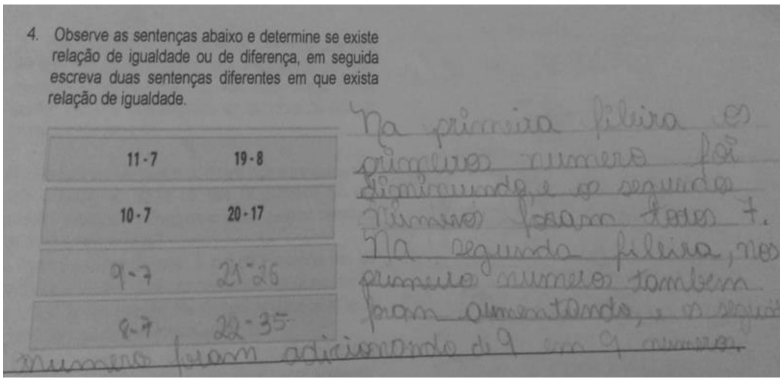
Assim, a BNCC (Brasil, 2017) estabelece as habilidades que devem ser trabalhadas ano a ano até efetivamente chegar ao ensino da álgebra. Estas habilidades permitem o desenvolvimento do pensamento algébrico. Na elaboração da avaliação diagnóstica, utilizamos como referência as habilidades previstas na BNCC (Brasil, 2017), uma vez que podemos entender que tais habilidades deveriam ser desenvolvidas nos alunos, já que se encontram no sétimo ano do Ensino Fundamental.

Destacamos como ponto fraco na avaliação diagnóstica a sua extensão, pois, tendo em vista abarcar todas as habilidades previstas do primeiro ao sexto ano no campo álgebra, ficou com 18 questões, o que, quando da sua aplicação, pode-se perceber um pouco extensa, demandando muito tempo para que os alunos a desenvolvessem. No entanto, pelo mesmo fator, foi possível ter uma visão ampla das dificuldades dos alunos, principalmente nesta via de mão dupla entre a aritmética e a álgebra.

Estabeleceremos agora alguns paralelos entre a avaliação diagnóstica, a intervenção e a produção final dos alunos, destacando e comentando situações pontuais.

Na avaliação diagnóstica, foi detectada a dificuldade que alguns alunos possuem no reconhecimento da função do sinal e igualdade. Retomamos a produção realizada pelo Grupo 2 na questão 4.

Figura 34 – Produção do Grupo 2 (questão 4)

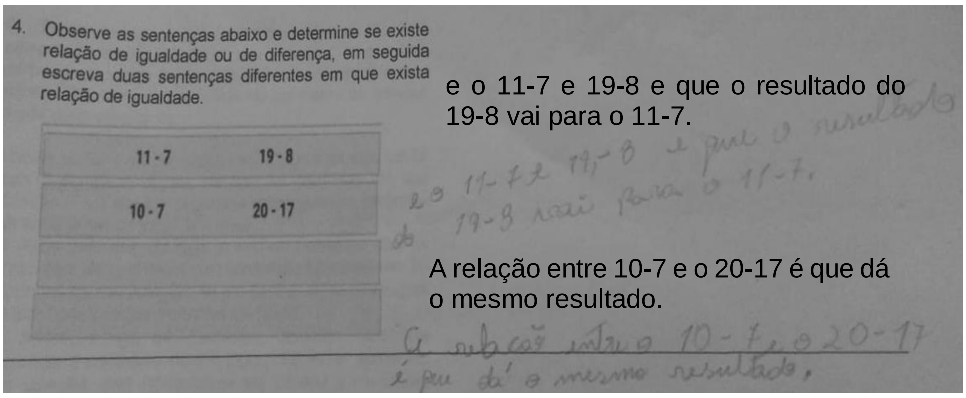


Na primeira fileira os primeiros números foi diminuindo e os segundos números foram todos 7. Na segunda fileira, nos primeiros números também foram aumentando e os segundos números foram adicionando de 9 em 9 números.

Fonte: próprio autor (2018).

Os alunos procuraram identificar as sentenças e relacioná-las, no entanto, quando solicitado para definir 2 outras relações de igualdade, não conseguiram. Fato semelhante ocorreu com o Grupo 8, que ainda esboçou entendimento do que fazer, mas não desenvolveu.

Figura 35 – Produção do Grupo 8 (questão 4)



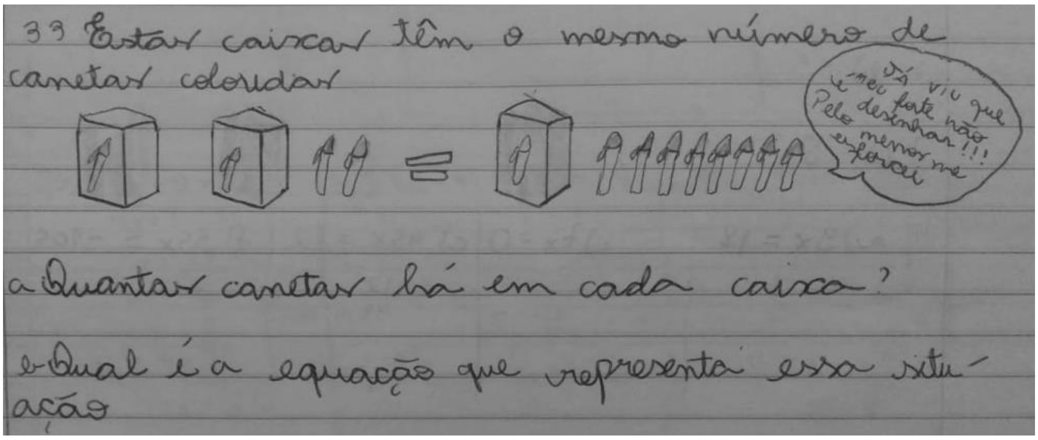
Fonte: próprio autor (2018).

Diante do observado, foi proposto o primeiro momento da intervenção, em que os alunos deveriam identificar as relações de igualdade, respondendo sentenças como as propostas abaixo.

$$\square = 15 + 11$$
$$11 + \square = 11 + 15$$
$$14 + \square = 11 + 15$$
$$\square + 12 = 11 + 15$$
$$\square + 13 = 11 + 15$$

Ao final da intervenção, foi solicitado aos alunos que respondessem alguns exercícios, relacionados ao que foi trabalhado, Booth (1995) destacava como uma das dificuldades a compreensão das notações e convenções o que foi confirmado com este exercício.

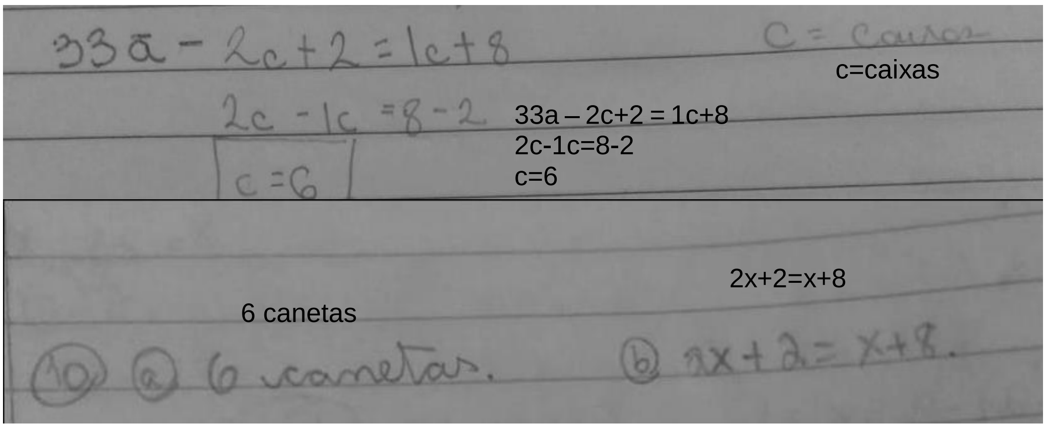
Figura 36 – Questão sobre relação de igualdade



Fonte: próprio autor (2018).

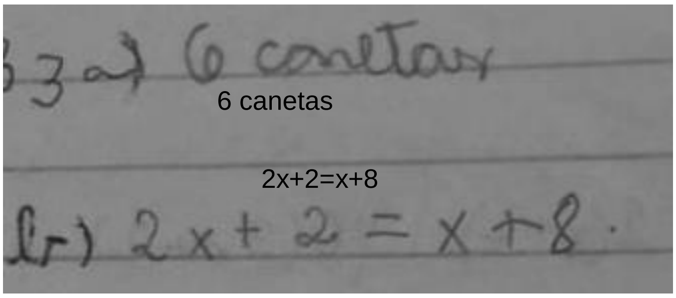
Veremos por meio de algumas produções que o entendimento da função do sinal de igualdade ocorreu, bem como é possível perceber em algumas produções a utilização do pensamento algébrico, atingindo assim o objetivo de aprendizagem.

Figura 37 – Produção sobre relação de igualdade (1)



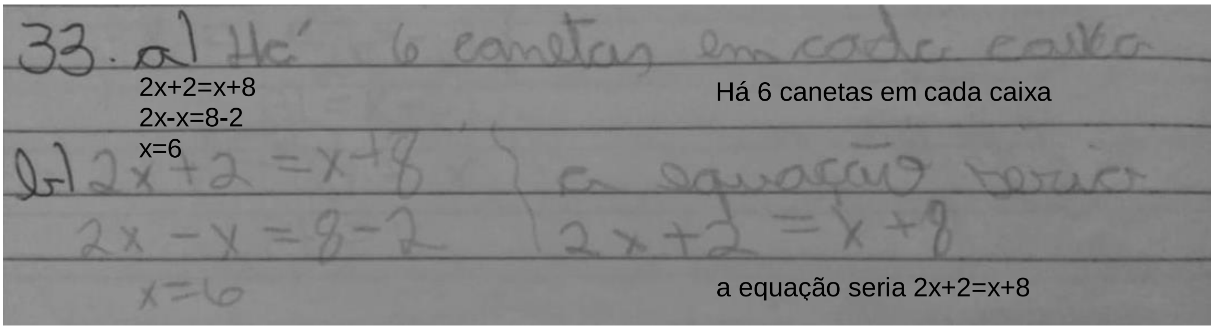
Fonte: próprio autor (2018).

Figura 38 – Produção sobre relação de igualdade (2)



Fonte: próprio autor (2018).

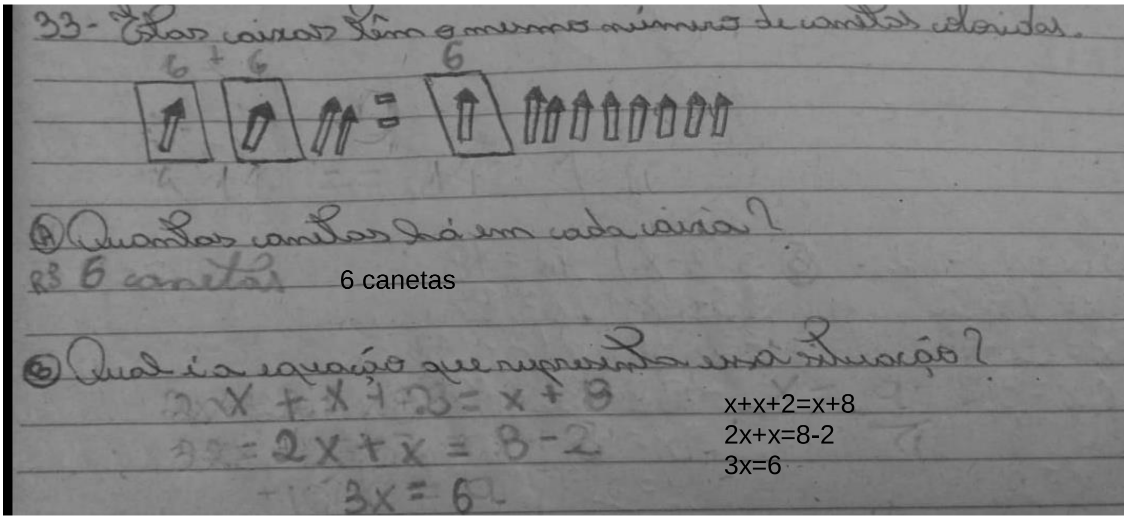
Figura 39 – Produção sobre relação de igualdade (3)



Fonte: próprio autor (2018).

Alguns alunos ainda cometem pequenas falhas na manipulação algébrica, o que é normal, uma vez que acabam de iniciar o estudo da álgebra. Percebe-se na produção abaixo que a aluna não se atentou aos sinais ao realizar a manipulação.

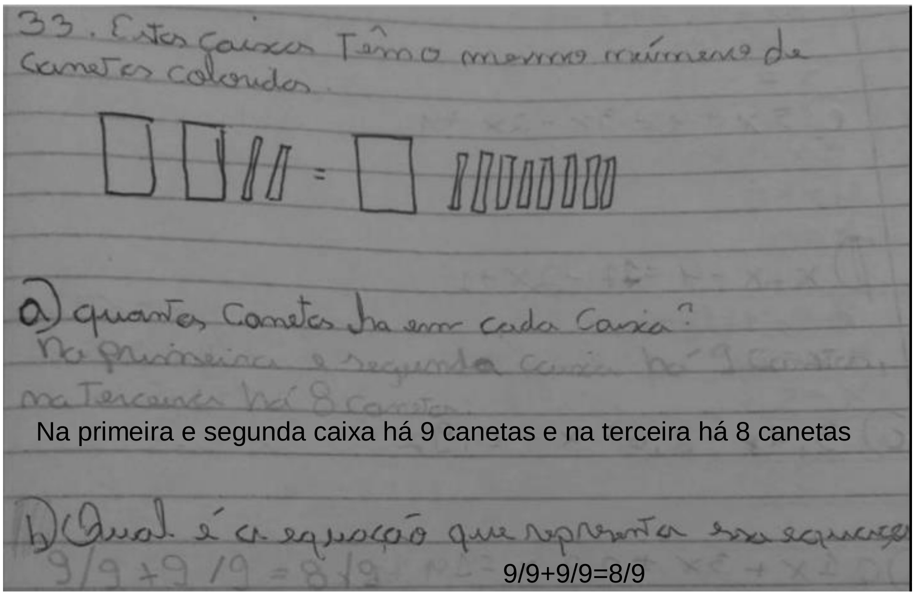
Figura 40 – Produção sobre relação de igualdade (4)



Fonte: próprio autor (2018).

Percebe-se também que há indícios de que alguns alunos ainda não conseguiram avançar no pensamento algébrico e com isso acabam errando nas respostas da atividade. Com estes alunos, devemos sempre nos atentar em suprir estas lacunas. Dos nove grupos pesquisados, seis responderam corretamente as questões propostas na avaliação somativa; três grupos tiveram maior dificuldade, no entanto, diante do currículo espiral,[4] os conceitos serão retomados no ano subsequente e as habilidades não adquiridas serão pontos de atenção.

Figura 41 – Produção sobre relação de igualdade (5)



Fonte: próprio autor (2018).

O segundo ponto de atenção levantado na avaliação diagnóstica e trabalhado na intervenção foi acerca do entendimento da proporcionalidade. Na avaliação diagnóstica, esse item foi investigado nas questões 14 e 15. Acima, analisamos, principalmente, as respostas dos alunos na questão 15, o que gerou a necessidade de, na intervenção, trabalhar este tema. Assim, foi proposto como segundo momento da intervenção a atividade abaixo.

[4] Segundo Brunner (1976), o currículo espiral é a oportunidade dada ao aluno de rever os mesmos assuntos em anos subsequentes com diferentes profundidades.

Maria pintou as paredes de sua sala com uma cor que criou, misturando as cores amarelo e verde. Para cada 2 doses de amarelo, juntou 3 doses de verde.

a) Se a Maria colocar num recipiente 45 doses de verde, quantas doses de amarelo deverá juntar para obter a cor que criou?

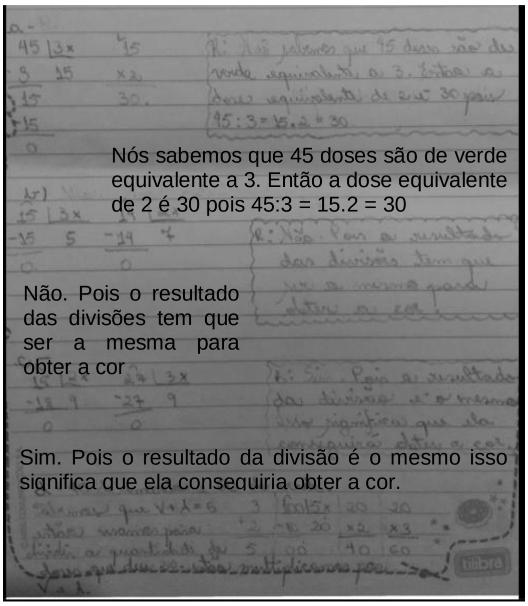
b) Se a Maria colocar num recipiente 14 doses de amarelo e 15 doses de verde, obtém a cor com que pintou as paredes da sua sala?

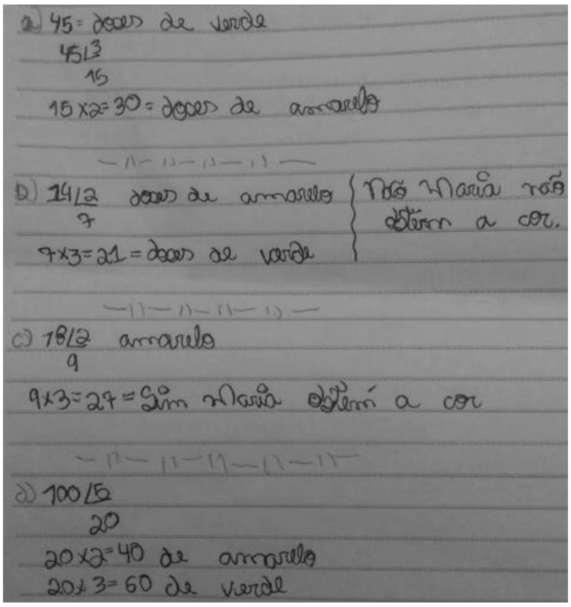
c) E se a Maria colocar num recipiente 18 doses de amarelo e 27 doses de verde, obtém a cor que inicialmente usou?

d) Se Maria utilizou ao todo 100 doses das tintas, quantas seriam de amarelo e quantas seriam de verde?

Após momentos de discussões, a partir da análise das respostas dos alunos, percebemos avanços consideráveis no entendimento das questões. As produções abaixo ilustram essa afirmação.

Figura 42 – Produção sobre razão e proporcionalidade

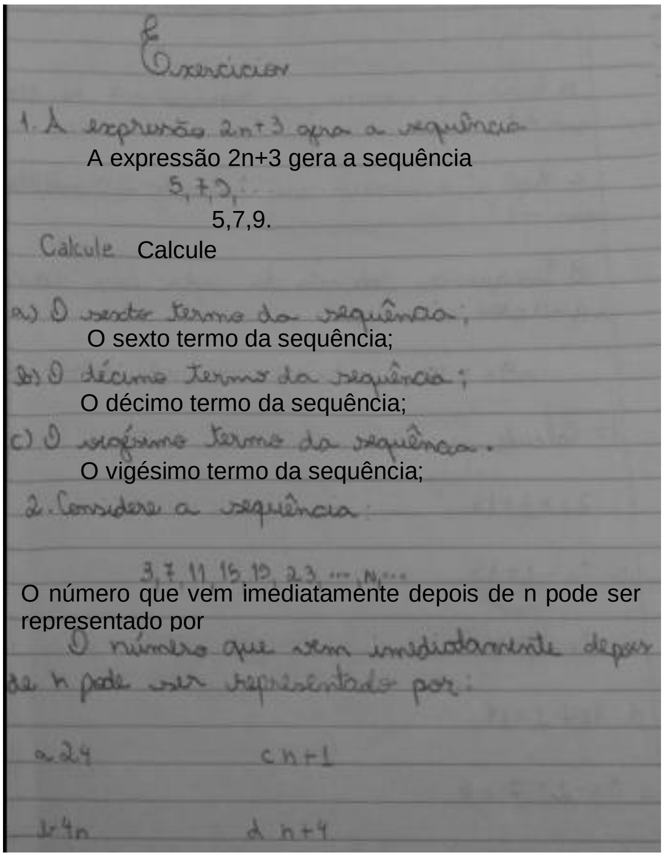




Fonte: próprio autor (2018).

Nos três momentos seguintes, saímos da esfera pré-algébrica e iniciamos a introdução à álgebra, priorizando três habilidades. A primeira é relacionada ao reconhecimento de situações que poderiam ser resolvidas com a álgebra, viabilizando aos alunos a oportunidade de aplicar o pensamento algébrico, tendo o professor como mediador, a partir de situações-problema. A segunda habilidade envolveu o reconhecimento de sequências numéricas e generalizações e a terceira a conversão da linguagem, transformando a língua materna em linguagem matemática/algébrica. Tudo o que foi desenvolvido, nestes momentos, foi comentado acima e a seguir vamos comentar algumas produções posteriores em que estas habilidades foram cobradas.

Figura 43 – Exercício sobre sequência e regularidade

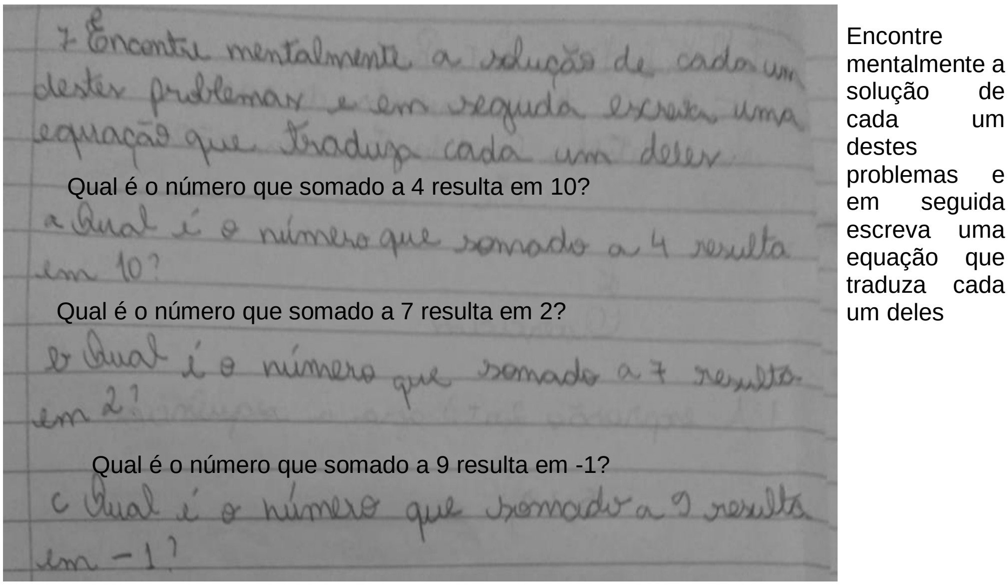


Fonte: próprio autor (2018).

Os exercícios propostos acima tinham por objetivo verificar o entendimento em relação às sequências, descobrindo termos das sequências e generalizando. Alguns alunos se utilizaram da álgebra para chegar aos resultados, outros, porém ainda resolveram fazendo a contagem; de uma forma ou de outra, o entendimento sobre o que é a sequência e o reconhecimento de padrões mostraram-se eficientes.

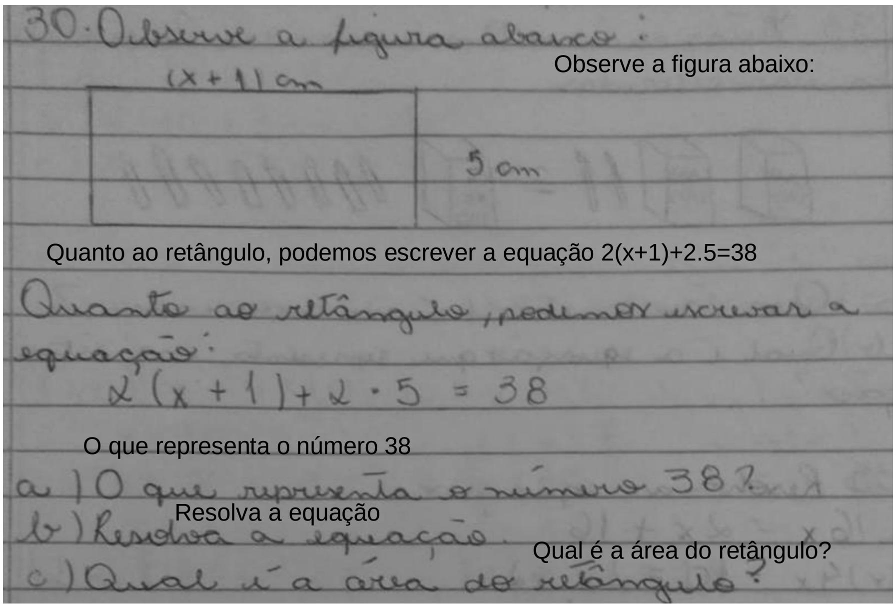
Outra habilidade que também foi alvo da intervenção foi a transformação da língua materna para a linguagem matemática, principalmente a linguagem algébrica. Na atividade abaixo, o objetivo é verificar se o aluno consegue perceber a utilização da álgebra para a resolução de problemas.

Figura 44 – Exercício sobre a conversão em linguagem algébrica



Fonte: próprio autor (2018).

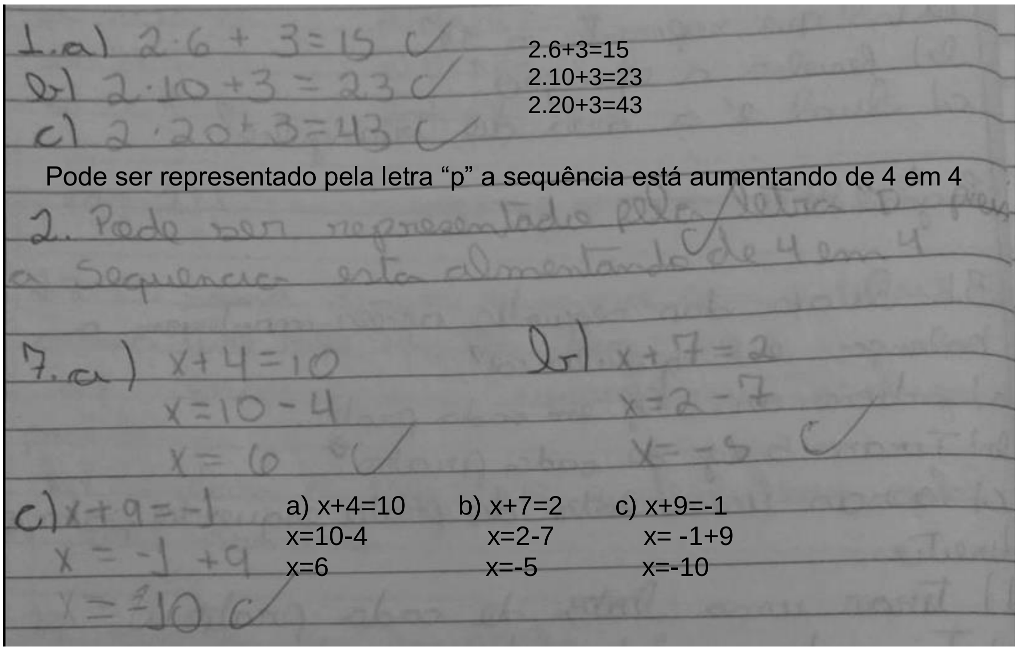
Figura 45 – Exercício sobre o uso da álgebra



Fonte: próprio autor (2018).

Na produção abaixo, percebemos que o aluno entendeu a utilização da álgebra nos exercícios tanto para identificar termos da sequência quanto na conversão da língua materna para a algébrica, manipulando as equações com eficiência.

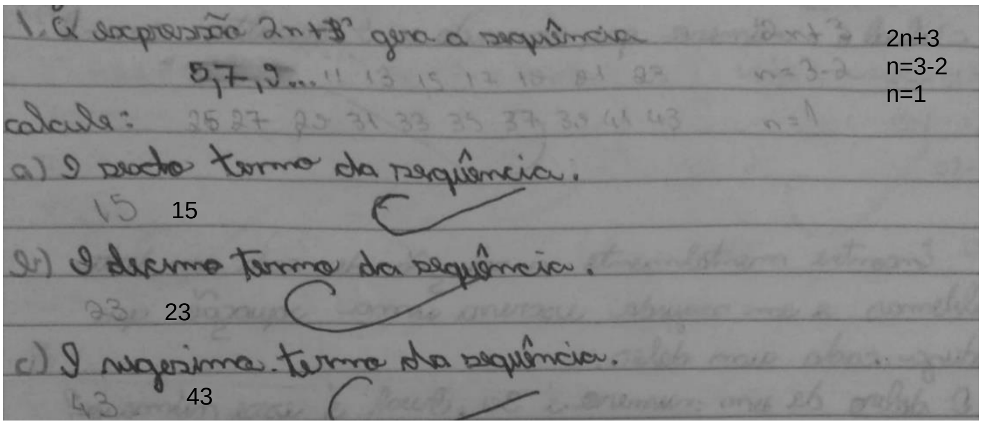
Figura 46 – Produção sobre os exercícios propostos (1)



Fonte: próprio autor (2018).

Já o aluno abaixo utilizou-se da linguagem numérica para atender seu objetivo, não utilizando a álgebra.

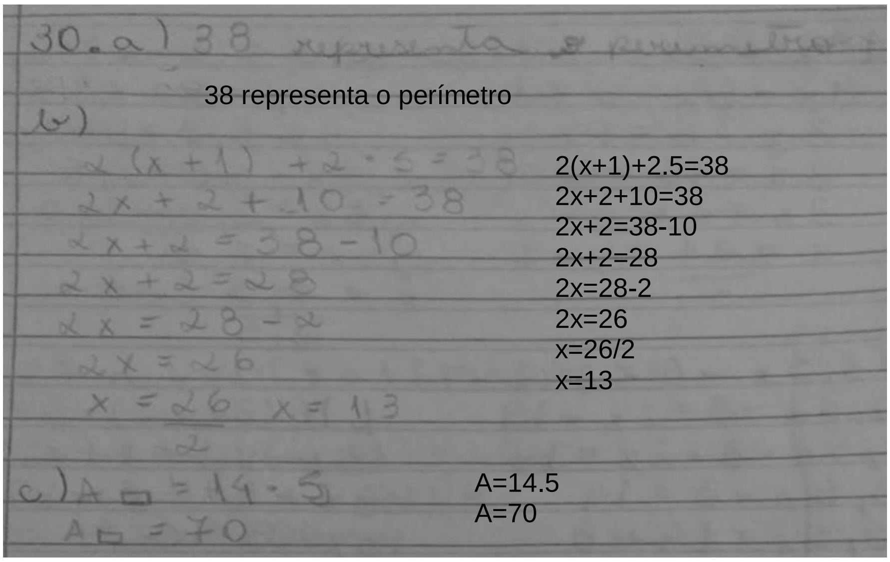
Figura 47 – Produção sobre os exercícios propostos (2)



Fonte: próprio autor (2018).

A questão em que foi proposto achar a área do retângulo a partir da álgebra é comum. Este tipo de atividade tem por base a concepção denominada de fundamentalista-analógica, pois, enquanto eleva o valor instrumental da álgebra, mantém o caráter fundamentalista, não somente na ideia de entender as propriedades, mas de uma forma mais visual, socorrendo-se da geometria e de materiais concretos para o entendimento da álgebra, sem contudo descaracterizar o caráter abstrato da álgebra como estágio de aprendizagem.

Figura 48 – Produção sobre os exercícios propostos (3)



Fonte: próprio autor (2018).

Após a realização da intervenção e a comparação da avaliação diagnóstica com a atividade final, podemos avaliar que os alunos demonstraram entendimento dos conceitos algébricos e da parte introdutória da álgebra, estudo este que tem sua continuidade nos anos posteriores. Cabe ainda salientar que, em toda a minha prática, foi a primeira vez que me preocupei com o desenvolvimento do pensamento algébrico, antes da introdução do conceito de álgebra. Isso, na prática, possibilitou, por parte dos alunos, o entendimento dos conceitos iniciais algébricos. Posso afirmar, por meio, das produções dos alunos, na avaliação somativa, bem como pelo desenvolvimento das atividades propostas, que a postura investigativa a qual assumiram também contribuiu para a apropriação do conhecimento de maneira significativa.

A opção na intervenção por atividades que motivassem o espírito investigativo, bem como o trabalho com situações-problema, em que o aluno se vê diante da situação, em busca de uma solução por meio do levantamento de hipóteses com a intervenção mínima do professor, auxiliou na aprendizagem dos alunos e no entendimento dos conceitos algébricos. No ensino introdutório da álgebra, preocupamo-nos em verificar se o aluno possuía o pensamento algébrico desenvolvido e pouco nos preocupamos com a resolução repetitiva de equações, buscando situações contextualizadas que de fato tornam o ensino da matemática mais prazeroso e significativo.

No que diz respeito à intervenção, nós a avaliamos como positiva, mas na possiblidade de replicação por algum professor, indicaríamos que ela fosse aplicada ao longo do ano, não se concentrando em um só momento, proporcionando assim maior tempo para a recuperação de defasagens. Uma modificação empreendida ao longo do processo foi a diversificação em atividades realizadas em grupo e individuais. Com isso, ao mesmo tempo que os alunos tiveram a oportunidade de aprender com os colegas, o que nos faz recordar a Zona de Desenvolvimento Proximal de Vygotsky, também se oportuniza ao professor verificar individualmente os conceitos que necessitam ser trabalhados. A seguir, apresentamos o produto da pesquisa e, por último, as considerações finais.

7 PRODUTO

O estudo da álgebra é um grande desafio tanto para o aluno quanto para o professor. Podemos afirmar isso por meio da própria prática, bem como as indicações de diversos estudos teóricos e práticos, estudos estes que vêm ocorrendo há muitos anos, com o objetivo de trazer melhoria para o ensino algébrico. Neste sentido, Booth (1995, p. 23), após realizar pesquisa com relação à memória dos adultos, no que diz respeito à álgebra e com adolescentes de 13 a 16 anos, afirma que “a álgebra é fonte de confusão e atitudes negativas entre os alunos”. Na maioria dos currículos atuais, o ensino da álgebra se inicia no segundo semestre do sétimo ano e ocorre de forma abrupta, o que pode ser um dos fatores de dificuldade. Lins e Gimenez (2006) indicam que a introdução tardia à álgebra no Ensino Fundamental tem grande parcela de culpa na situação atual do ensino de álgebra; segundo os autores, a aritmética e a álgebra devem ser desenvolvidas em conjunto desde o início da vida escolar do estudante.

O estudo da álgebra deveria ser valorizado, pois ele é fundamental no desenvolvimento integral do cidadão. A álgebra, quando dominada, eleva o ser humano a um estágio de pensamento superior, permitindo assim um olhar mais livre, abstrato e geral (VYGOTSKY, 2001, p. 267). Observando a história da matemática nos currículos brasileiros, são percebidos altos índices de retenção e preocupação exagerada na mecanização e no treino das habilidades. Este fator diminui com o advento da matemática moderna, que tinha por objetivo aproximar a matemática escolar às estudadas pelos pesquisadores. No entanto, isso acabou se tornando um grande problema, pois, devido ao excesso de simbolismo e manipulação de fórmulas, o estudo acabou se tornando complexo e fora da realidade dos alunos. Ao notar esta distorção, o foco foi alterado para a resolução de problemas, priorizando o aspecto social e o cognitivo, o que influenciou, no sentido de priorizar a aquisição de competências, o papel do aluno na sua construção de conhecimento.

Em Portugal, percebe-se um movimento de reforma, o que também vem ocorrendo atualmente no Brasil. Esta acontece em virtude das influências da matemática moderna, contestando o movimento que sobrevalorizava a lógica e as estruturas abstratas da álgebra e em que se reduzia a geometria (BROCARDO *et al.*, 2006). Assim, a ênfase da álgebra escolar necessitaria de mudança, não focando na aquisição de conhecimentos isolados, mas na utilização da matemática para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar, o que implica a confiança e a motivação pessoal para fazê-lo (ME-DEB, 2001, p. 58). No Brasil, a álgebra com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais tinha por objetivos o desenvolvimento dos pensamentos numéricos, algébricos e geométricos. No decorrer dos trabalhos com os números, o estudante precisa ter os primeiros contatos com a álgebra, mesmo que ainda não se utilize de convenções.

No entanto, em que pese a preocupação com o ensino da álgebra, este documento é pouco enfático em como isso poderia ocorrer na prática e em quais anos de escolaridade as competências relacionadas à álgebra deveriam ser desenvolvidas. Com o advento da Base Nacional Comum Curricular, percebe-se um movimento de valorização da álgebra, ao prever estudos da álgebra desde o primeiro ano dos anos iniciais, sem qualquer rigor algébrico, mas com o objetivo de desenvolver o pensamento algébrico. O documento é de 2017 e se encontra em fase de adaptação e implantação, passando a ser obrigatório a partir de 2020.

Observando a dificuldade dos alunos na aprendizagem da álgebra e as mudanças recentes da BNCC, foi possível perceber que a introdução do ensino à álgebra se tornará mais efetiva caso os estudantes possuam desenvolvido em si o pensamento algébrico. Parte-se deste pressuposto e da previsão na BNCC do ensino da pré-álgebra desde os anos iniciais, pensando também que os professores dos anos iniciais deverão passar por momentos de formação continuada.

Diante do que foi exposto, o presente produto trata-se de uma **oficina**, tendo como público-alvo os professores polivalentes que lecionam nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A oficina está dividida em quatro momentos. São eles:

- **Primeiro momento**: Leitura e discussão dos documentos oficiais (PCN e BNCC) e de autores que tratam do ensino da álgebra. Além disso, pretendemos propiciar situações de análise dos currículos que estão sendo desenvolvidos pelos professores no contexto escolar. A intenção é estabelecer relações entre os referenciais teóricos adotados na oficina e as propostas curriculares desenvolvidas pelos participantes;

- **Segundo momento**: Discussão sobre a importância dos registros no contexto escolar. Um elemento importante para repensarmos as ações que estão sendo desenvolvidas em sala de aula é termos instrumentos de registros das práticas que estão sendo desenvolvidas (registros descritivos). A intenção nesta etapa é discutir a importância dos registros e analisarmos alguns episódios de aula (ensino do pensamento algébrico/pré-álgebra);
- **Terceiro momento**: Elaboração de uma sequência didática que tenha como foco dois aspectos: o ensino da pré-álgebra e o desenvolvimento de uma postura investigativa. O objetivo da sequência é propor aos alunos o desenvolvimento do pensamento algébrico que irá auxiliar, posteriormente, na introdução da álgebra.
- **Quarto momento:** Avaliação da oficina. A intenção é capturarmos a percepção dos participantes a respeito do trabalho que será propiciado. Estamos cientes de que o desenvolvimento das ações a serem desenvolvidas também dependerá das finalidades dos participantes.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho surgiu da inquietação do autor diante das dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra, conteúdo previsto no programa de matemática, cuja introdução ocorre no sétimo ano do Ensino Fundamental. A partir desta inquietação, passou-se a fazer diversas pesquisas sobre os estudos relacionados ao ensino da álgebra.

Booth (1995) afirma que a álgebra é fruto de confusão e atitude negativa entre os alunos, e este fator é perceptível em sala de aula diante da grande dificuldade apresentada pelo aluno quando as letras são inseridas no contexto matemático.

A forma como a álgebra é inserida pode ser um dos fatores que causam tamanha confusão, neste sentido Lins e Gimenes (2006) colocam que a aritmética e álgebra devem ser desenvolvidas em conjunto desde o início da vida escolar.

Ao realizar o levantamento bibliográfico de produções, cujo tema estivesse relacionado com o ensino da álgebra, constatamos que o ensino da álgebra tem sido um desafio ao longo dos tempos. Os alunos apresentam grandes dificuldades, e, à medida que avançam em seus estudos, tais dificuldades aumentam, diante da ausência de requisitos mínimos fundamentais para o entendimento da álgebra. No que diz respeito a requisitos mínimos da álgebra, apontamos o desenvolvimento do pensamento algébrico, assim Civiski (2015) cita a importância de propor situações que conectem a aritmética com a álgebra já nos anos iniciais. Situações de cálculos por si só são insuficientes para permitir aos alunos que pensam matematicamente assim destaca Hsu (2015) que ainda destaca grande aplicação da álgebra na resolução de problemas, bem como em outros campos da matemática.

O estudo da álgebra se inicia oficialmente em algumas prefeituras e no estado de São Paulo no sétimo ano do Ensino Fundamental, e a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017) ratifica esta informação. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) de matemática, embora faça algumas citações sobre o ensino da álgebra, não dava a ênfase que este conteúdo merece. Apesar do desenvolvimento de uma pré-álgebra, somente nos anos finais o trabalho sobre o assunto se ampliava; com a inserção de situações-problema, o aluno entenderia as diferentes funções da álgebra, equacionando os problemas e reconhecendo as regras de soluções.

Para se ter uma ideia, a palavra álgebra é citada em todo PCN apenas sete vezes, o que é pouco diante de toda a complexidade do tema. Uma nova abordagem do conteúdo foi realizada na BNCC (Brasil, 2017), transformando a álgebra em um dos grandes temas e dando a ênfase merecida. Neste documento, a palavra álgebra é citada dezenove vezes quando trata apenas do Ensino Fundamental de nove anos; dessa forma, o ensino pré-algébrico desde o primeiro ano do Ensino Fundamental é enfatizado, desenvolvendo assim no aluno um pensamento algébrico e o capacitando a pensar abstratamente. Tendo em vista que a BNCC (Brasil, 2017) somente foi aprovada em 2017 e que existe um tempo de transição e adaptação, acreditamos que ao longo do tempo o ensino da álgebra possa melhorar, principalmente pelo fato de estar prevista desde os primeiros anos de escolarização, cabe no entanto uma conscientização do docente responsável por promover situações de aprendizagem que favoreçam o ensino da álgebra.

No levantamento bibliográfico realizado, percebemos que a maior dificuldade dos alunos no entendimento da álgebra vem da ausência ou do baixo desenvolvimento do pensamento algébrico, embora não seja algo mensurável a afirmação se faz possível através dos indícios percebidos ao realizar algumas atividades propostas. Além disso, há constantes confusões entre a aritmética e a álgebra, principalmente na passagem de uma para outra. Freitas (2003) em seus estudos percebeu a dificuldade dos alunos em responder utilizando a linguagem algébrica, muitos fazendo uso da linguagem natural e linguagem numérica. Algumas destas confusões destacadas no presente trabalho são o entendimento do significado do sinal de igualdade como sinal de equivalência, a forma como são realizadas as operações básicas, além de como os conceitos básicos vêm sendo desenvolvidos nos anos anteriores à introdução da álgebra

Partindo do pressuposto de que o pensamento algébrico deveria estar desenvolvido para que o ensino da introdução à álgebra fosse mais efetivo, optamos por diagnosticar o progresso deste pensamento, utilizando para tal as habilidades previstas na BNCC (Brasil, 2017) no campo álgebra dos anos iniciais.

Realizada assim a avaliação diagnóstica, observamos as habilidades com maiores defasagens, uma vez que o tempo que tínhamos para trabalhar os assuntos não era tão extenso. Optamos então por habilidades que apresentavam grande discrepância e com cujo entendimento o entendimento da álgebra seria facilitado. Nossa preocupação durante a intervenção foi promover no aluno atitudes investigativas, realizadas a partir de estratégias com: o trabalho em equipe, a mediação do professor, aproximação da situação-problema com o cotidiano do aluno, utilização de recursos digitais e resolução de problemas.

Neste sentido, focamos na intervenção habilidades relacionadas ao sentido do sinal de igualdade, as relações de razão e proporcionalidade, o entendimento da variável e a conversão da linguagem materna para a linguagem matemática. Com a realização da intervenção, percebemos que as lacunas diminuíram e a introdução da álgebra se tornou um momento de maior aprendizado. Para trabalhar as habilidades, selecionamos atividades que pudessem promover no aluno atitudes investigativas. Braumann (2002) comenta a capacidade de investigação matemática como requisito da aprendizagem matemática associando a disciplina com a compreensão de mundo.

A intervenção foi realizada em uma sala de sétimo ano de uma escola municipal do litoral sul. Em todos os momentos, o professor procurava que os alunos desenvolvessem suas hipóteses e colocassem suas opiniões, facilitando o desenvolvimento do pensamento algébrico, e tornando a intervenção mais instigante aos alunos. Destaque para o professor como mediador, permitindo assim que o aluno construísse suas hipóteses e realizasse a troca com seus pares, como propõe Vygotsky (1991) acerca da Zona de Desenvolvimento Proximal.

A pesquisa nos rendeu boas surpresas em relação ao ensino da álgebra, embora o conceito de álgebra seja algo distante dos alunos nesta idade, principalmente porque defini-la não é uma preocupação dos professores dos anos iniciais. Constatamos a existência de um pensamento algébrico nos alunos; ainda que de forma básica, o desenvolvimento deste pensamento é fator importante para a introdução da álgebra.

Os professores, quando se deparem com o ano em que a álgebra deverá ser introduzida, poderão se socorrer de estratégias de ensino da pré-álgebra e álgebra, previstas para os anos anteriores, utilizando a avaliação diagnóstica, a fim de verificar o desenvolvimento do pensamento e propondo aos alunos situações didáticas e a-didáticas, proporcionando, assim, a oportunidade de investigar, elaborar hipóteses. A utilização de situações a-didáticas segundo Brosseau (2008) permiti ao que o aluno solucionar problemas mobilizando o conhecimento que possui. Assim vai assumindo uma atitude investigativa uma vez que se sente desafiado com a situação proposta.

Com a intervenção, podemos perceber maior facilidade no entendimento dos conceitos algébricos iniciais. Logo, constatamos que a utilização de atividades com o foco no desenvolvimento do pensamento algébrico colabora efetivamente na aprendizagem da álgebra e no desenvolvimento de uma atitude investigativa e do pensamento científico. As estratégias exaustivamente citadas também foram de fundamental importância para o sucesso da intervenção.

Com a pesquisa, concluímos que o desenvolvimento do pensamento algébrico é fundamental para a introdução da álgebra. Além disso, verificou-se que o professor poderia, antes de iniciar o estudo da álgebra, realizar avaliações diagnósticas, a fim de verificar o progresso de tal pensamento, valendo-se também dos estudos teóricos e práticos sobre o assunto, uma vez que estes são fontes de consulta e embasamento para qualquer bom planejamento de trabalho.

Para planejar a avaliação diagnóstica, o professor poderia levar em consideração as habilidades previstas na BNCC para os anos anteriores, identificar lacunas e propor atividades que ampliem o pensamento algébrico. Como sugestão, esta verificação poderia ocorrer ao longo do ano, não somente para o ensino da álgebra.

No processo de ensino, tivemos avanços principalmente, porque, antes de entrar no ensino da álgebra em si, houve a preocupação de verificar até que ponto os alunos conseguiram pensar algebricamente. A utilização de estratégias que estimulassem o desenvolvimento do pensamento algébrico deveria ser proposta pelo professor ao longo do ano, empregando situação a-didáticas, situações-problema, enfim, nunca fornecendo respostas prontas, mas permitindo o processo de pensamento do aluno.

É importante que outros estudos sejam realizados nesta área, que visem à efetividade do trabalho no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento algébrico. É importante também pensar na formação continuada dos professores neste sentido, em especial os professores polivalentes diante dos grandes desafios propostos pela BNCC no campo da matemática. Diante disso, como produto final nos propomos a criar uma oficina de formação continuada para professores do Ensino Fundamental nos anos iniciais, com o foco no ensino da pré-álgebra e no desenvolvimento de uma postura investigativa.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, M. **O percurso da didatização do pensamento algébrico no Ensino Fundamental**: uma análise a partir da transposição didática e da teoria antropológica do didático. Orientador: Elio Carlos Ricardo. 2014. 312 f. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

ARAUJO, E. A. D. Ensino de álgebra e formação de professores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331-346, dez. 2008.

BALLESTER, M. *et al*. Avaliação como apoio à aprendizagem. Tradução Valério Campos. Porto Alegre: Artmed, 2003.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995 (p. 23-37).

BOYER, C. B. **História da matemática**. Trad. Elza F Gomide. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. **Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961**. Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília: Congresso Nacional, 1961.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. . Brasília: MEC, 1996.

BRASIL. **Resolução nº 466, de 12 de dezembro de 2012**. Estabelece as diretrizes e normas regulamentadoras de pesquisa envolvendo seres humanos. Brasília: CNS, 2012.

BRASIL. **Constituição da república federativa do Brasil**. Brasília: Congresso Nacional, 1988.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC; SEF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática – ensino de quinta a oitava série. Brasília: MEC; SEF, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasilia: MEC, 2016.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponivel em: https://tinyurl.com/ycwza8jx.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matamética e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE, J. P. *et al*. **As atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formaçao dos professores**. Lisboa: SEM; SPCE, 2002 (p. 5-24).

BROCARDO, J. *et al*. Números e álgebra: desenvolvimento currícular. **Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação**, p. 65-92, 2006.

BROSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In: BRUN, J. **Didática das matemáticas**. Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996 (cap. 1, p. 35-113).

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CIVINSKI, D. D. **Introdução ao estudo da aritmética e da álgebra no Ensino Fundamental**. Orientadora: Tânia Baier. 2015. 155 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2015.

DAMIANI, M. F. Sobre pesquisa de intervenção. *In*: A. L., M. G. C. T. **Didática e práticas de ensino na realidade escolar contemporânea recurso eletrônico**: constatações. [S.l.]: Junqueira & Marin Editores, 2012 (p. 2.882-2.890).

DAMIANI, M. F. *et al*. Discutindo pesquisa do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**, Pelotas, p. 57-67, maio-ago. 2013.

DELVAL, J. **Aprender a aprender**. Trad. Jonas Pereira dos Santos. Campinas: Papirus, 1998.

DIEHL, A. A. **Pesquisa em ciências sociais aplicadas:** métodos e técnicas. São Paulo: Prentice Hall, 2004.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 3. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2002.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar a educação algébrica elementar. **Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação**Campinas, Unicamp, v. 4, n. 1, p. 78-91, mar. 1993.

FREITAS, J. L. M. Registros de representação na produção de provas na passagem da aritmética para álgebra. *In*: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

FREITAS, M. T. D. A. A pesquisa de abordagem histórico-cultural: um espaço educativo de constituição de sujeitos. **Revista Teias**, Rio de Janeiro, v. 10, 2009.

HOFFMANN, J. M. L. **Avaliar**: respeitar primeiro, educar depois. Porto Alegre: Mediação, 2008.

HSU, M. H. **Reflexões sobre o ensino da álgebra para professores de matemática do Ensino Fundamental da rede municipal de Manaus**: uma proposta metodológica. Orientador: Roberto Antonio Cordeiro Prata. 2015. 90 f. Dissertação – (Mestrado) Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2015.

KAMII, C.; DECLARK, G. **Reinventando a aritmética**: implicações da teoria de Piaget. 6. ed. Campinas: Papirus, 1992.

LIMA, C. N. D. M. F. D.; NACARATO, A. A investigação da própria prática: mobilização e apropriação de saberes profissionais em matemática. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, v. 5, p. 241-266, ago. 2009.

LINS, R. C. **Matemática, monstros, significados e Educação Matemática**. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani e BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século vinte e um**. Campinas: Papirus, 2006.

MAGALHÃES, A. G. **Construção de conceitos algébricos com alunos do 7º ano**. Orientador: Wolmir José Böckel. 2016. 143 f. Dissertação (Mestrado) – Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 2016.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 7.ed. São Paulo: Atlas, 2010.

ME-DEB. Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais. Lisboa: ME-DEB, 2001.

MILIES, F. C. P. Breve história da álgebra abstrata. In: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – SBM, 2. **Anais**... Salvador: Universidade Federal da Bahia. Disponível em: http://www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf.

MIRANDA, T. L. **A noção de variável de alunos do Ensino Fundamental**. Orientador: João Cláudio Brandemberg.2014. 160 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2014.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED; UFMG, 2013.

MOTTA, I. A. R. Projeto Teia do Saber. **Metodologias do Ensino de Matemática**, São Paulo, 2006.

NÓVOA, A. Desafios do trabalho do professor no mundo contemporâneo. **SINPRO-SP**, São Paulo, p. 1-24, 2007.

PIAGET, J. **Seis estudos de psicologia**. Trad. Maria Alice Magalhães D´Amorim e Paulo Sérgio Lima Silva. 22. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1997.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

QUEIROZ, J. M. S. **Resolução de problema da pré-álgebra e álgebra para fundamental II do ensino básico com o auxílio do modelo de barras**. Orientadora: Yuriko Yamamoto Baldin. 2014. 144 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

SANTOMÉ, J. T. As culturas negadas e silenciadas no currículo. In: SILVA, Tomaz Tadeu da (Org.). **Alienígenas na sala de aula: uma introdução aos estudos culturais em educação**. 4. ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

SILVA, M. A. **Resolução de problemas algébricos**: uma investigação sobre estratégias utilizadas por alunos do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental da rede municipalde Aracaju/SE. Orientadora: Ivanete Batistados Santos. 2014. 118 f.Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2014.

SHEN, K.; CROSSLEY, J.; LUN, A. **História da matemática**. Oxford: Oxford University Press, 1999.

SMITH, D. E.; C. ***History of mathematics****: the nine chapters on the mathematical art*. Nova Iorque: Dover Publications; Penguin Books, 1992 (v. 2).

TRIVIÑOS, A. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

USISKIN, Z. **Pensamento algébrico**, notas k-12. In: Barbara Moises (Ed.), Algebraic thinking, grades K-12. Reston: NCTM, 1999.

VASCONCELOS, C. C. **Ensino-aprendizagem da matemática**: velhos problemas, novos desafios. Disponível em: http://www.ipv.pt/millenium/20_ect6.htm. Acesso: out. 2018.

VYGOTSKY, L. S. O problema de método. *In*: VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1991 (p. 67-98).

YOUNG, M. F. D. Por que o conhecimento é importante para as escolas do século XXI? **Cadernos de Pesquisa**, v. 46, n. 159, p. 18-37, jan.-mar. 2016.

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

PARA MENORES DE IDADE

Caros pais e responsáveis:

Gostaríamos de obter o seu consentimento para o menor______________________________ participar como voluntário da pesquisa intitulada *A álgebra e o desenvolvimento de uma atitude investigativa: a construção de estratégias de ensino*, que se refere a um projeto de Mestrado Profissional em Educação.

O estudo tem como objetivo investigar as dificuldades dos alunos na aprendizagem sobre a álgebra, em especial, em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

A forma de contribuição consiste em participar da resolução de questionário e avaliação diagnóstica. Além disso, dentro da própria aula serão ministradas, com o auxílio de recursos tecnológicos, noções algébricas para enfim ser ministrado o conteúdo relacionado à álgebra do ano, permitindo a gravação dos áudios da aula para posterior análise.

O nome dos participantes não será utilizado em qualquer fase da pesquisa, o que garante o anonimato e serão considerados estritamente confidenciais os registros.

Os participantes e responsáveis não terão despesa, nem compensação financeira relacionada à participação nessa pesquisa.

Gostaríamos de deixar claro que a participação é voluntaria e que o(a) aluno(a) poderá deixar de participar ou retirar o consentimento, ou ainda descontinuar a participação se assim o preferir, sem penalização alguma ou sem prejuízo de qualquer natureza.

Desde já, agradecemos a atenção e a participação. Colocamo-nos à disposição para maiores informações.

CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ____, portador (a) do documento de identidade ________________, responsável pelo menor ____, fui informado (a) sobre os objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada, e minhas dúvidas foram satisfatoriamente respondidas.

Tive tempo suficiente para decidir sobre a participação do menor e concordo em permitir a sua participação nesta pesquisa. Sei que poderei retirar o meu consentimento a qualquer hora, antes ou durante a mesma, sem penalidades nem prejuízos.

Assino o presente documento em duas vias de igual teor e forma, ficando uma em minha posse.

Itanhaém, _____ de ____________ de 2018.

______________________________ ______________________________

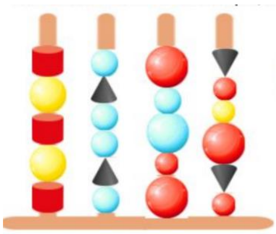
Responsável

Ricardo da Silva Sampaio
Pesquisador responsável
(Universidade Municipal de São Caetano do Sul)

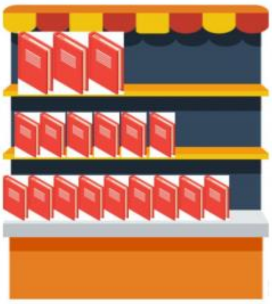
ANEXO B – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA – PENSAMENTO ALGÉBRICO

1 - Lucas está jogando vídeo game e precisa descobrir a senha para destravar a próxima fase. Ajude Lucas a descobrir a senha completando os pinos com a peça que falta.
DICA: CADA PINO DA SENHA SEGUE UM PADRÃO DIFERENTE.



2 - Ana resolveu arrumar sua estante de livros, começando de cima para baixo. Explique que padrão Ana seguiu em uma possível quarta prateleira:



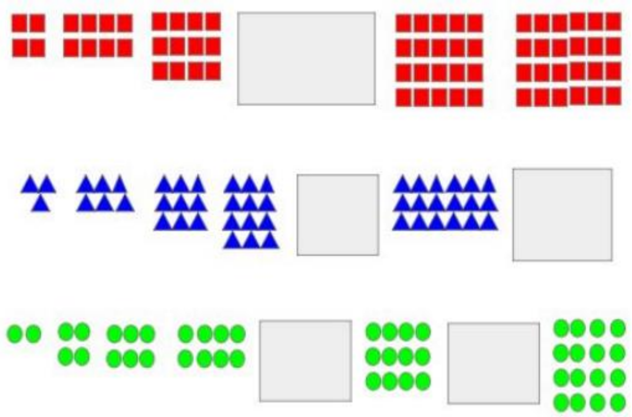
3 - Observe os números abaixo retirados em um jogo de cartas por dois amigos:

Escolha o maior número de cartas possíveis e faça uma sequência em ordem crescente, explicando a regularidade, por exemplo, na sequência 2, 4, 6 e 8 temos a seguinte regularidade: +2

4. Observe as sentenças abaixo e determine se existe relação de igualdade ou de diferença, em seguida escreva duas sentenças diferentes em que exista relação de igualdade.

11 - 7	19 - 8
10 - 7	20 - 17

5 - Observe as sequências abaixo. Você consegue identificar qual seria o elemento que está faltando em cada uma? Faça os desenhos nos retângulos vazios.



E se trocarmos os desenhos por números? Como ficariam cada uma das sequências? Tente descobrir as relações entre eles em cada sequência.

6 - Qual é o número natural que se for dividido por 8 resulta em 7 e deixa resto igual a 3?

7 - Qual é o número natural que se for dividido por 6 resulta em 4 e deixa o maior resto possível?

8 - Fernando tem uma coleção de carrinhos. Ele está sempre tentando aumentar sua coleção, e por isso participa de vários jogos. Algumas vezes perde, outras ganha. Por isso, a quantidade de carrinhos da coleção muda constantemente.

a) Esta semana ele participou de um jogo e ganhou um kit com 6 carrinhos. Agora ele tem 18 carrinhos em sua coleção. Será que conseguimos saber quantos carrinhos ele tinha antes do jogo?
b) Após participar do jogo, o avô de Fernando deu de presente a ele uma caixa com carrinhos. Agora ele tem 30 carrinhos na sua coleção. Se ele ganhar outra caixa igual a esta, com quantos carrinhos ele ficará?
c) André, amigo de Fernando, também coleciona carrinhos e participou de um jogo para tentar aumentar sua coleção, mas infelizmente ele perdeu 5 carrinhos. Depois deste jogo ele ficou com 27 carrinhos. Se não tivesse jogado, quantos carrinhos ele teria?

9 - Para organizar as meias elas comprarão caixas com divisões. Karina quer colocar 5 pares de meias em cada caixa. Se ela tem 15 pares, quantas caixas precisa comprar? Carolina só pode comprar duas caixas. Se ela tem 18 pares, quantos pares deve colocar em cada caixa?

10 - Mariana e Manuela foram comprar frutas para a festa saudável que haverá na rua. Para não haver injustiças, elas decidiram que cada uma deveria levar a mesma quantidade de peso, 52 quilos. Veja abaixo o que elas levaram: Os pais de Mariana acharam que era muita fruta e pediram que ela deixasse no mercado 17 quilos de fruta. Para continuarem com o combinado que fizeram, quais frutas Manuela levará para a festa?

11 - Complete as lacunas com números de forma a deixar as igualdades verdadeiras.

12 + 7 = 10 + ____	15 - 7 = ____ - 8
15 + ___ = 25 + 7	____ - 9 = 15 - 3
___ + 12 = 14 + 14	18 - 6 = 25 - ____

12 - Em determinada cidade, todos os anos é realizada uma feira de Degustação de Doces. Esta cidade possui várias docerias que participam do evento. Para este ano, as docerias que aderiram a feira participarão com 48 doces cada uma. Observe o quadro a seguir que traz informações sobre as docerias participantes, o doce que será disponibilizado para degustação e a quantidade em cada caixa:

Nome da Doceria	Tipo de Doce	Quantidade em cada caixa
Flávia Doçuras	**Brigadeiros**	**12 caixas**
Maria Mel	**Trufas**	**8 caixas**
Delícias da Vivian	**Beijinho**	**6 caixas**

Quantos doces foram colocados em cada caixa? Explique como você pensou para resolver.

13 - Dois grupos de motociclistas resolveram fazer um passeio no feriado. O grupo Zeus era composto por 25 motociclistas, que juntos percorreram 5 950 quilômetros. O grupo Feras tinha cinco vezes mais integrantes e cada integrante percorreu o mesmo percurso que os integrantes do grupo Zeus. Sabendo que cada motociclista fez o mesmo percurso. Qual foi o percurso realizado por cada integrante deste grupo? O que posso afirmar sobre o percurso realizado pelos dois grupos?

14 - Resolva as situações abaixo:

a) Com um litro de refrigerante é possível servir 4 copos de 250 ml. Quantos litros são necessários para servir 2 copos de refrigerante para doze pessoas?

b) Com um pacote de pipoca que custa R$ 2,50 consigo servir pipoca para três pessoas. Quanto gastarei para servir pipoca para meus doze amigos?

c) Se eu convidar somente a metade dos meus amigos, quanto devo comprar de pipoca e de refrigerante?

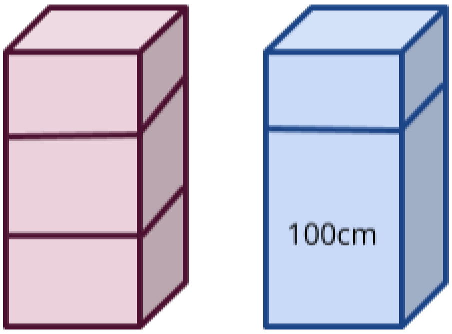
15 - Rogério e Karina são irmãos. Nos finais de semana eles trabalham vendendo sorvete. Esse final de semana eles venderam juntos R$ 75,00. Agora eles precisam dividir o dinheiro. O problema é que Luana vendeu o dobro do que Rogério vendeu. Então responda:

a) Rogério acha que eles devem receber quantias iguais. Você concorda? Por quê?

b) Como poderíamos dividir o dinheiro de forma justa?

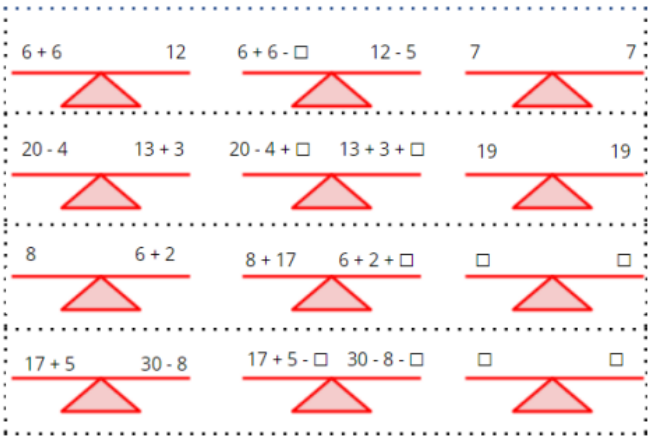
c) Como fazemos essa divisão? Quanto cada um deve receber?

16 - Ao organizar cinco caixas, fiz duas pilhas com o
mesmo tamanho, mas apenas 1 delas estava etiquetada com a altura.

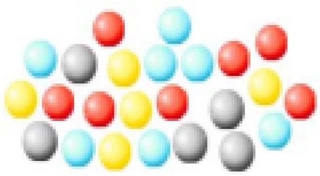


Qual é a altura de pilha de caixas? Podemos representar essa situação problema por meio de uma igualdade matemática?

17 - Vamos manter as balanças equilibradas:



18 - Num jogo de bolinhas de gude, Pedro ganhou 24 bolinhas jogando com Marcos e Tiago. Pedro ganhou de Tiago o dobro do número de bolinhas que ganhou de Marcos. Neste jogo, quantas bolinhas Pedro ganhou de Tiago?



ANEXO C – QUADRO COMPARATIVO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA	
QUESTÃO	HABILIDADE
1	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida. (EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.
2	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras. (EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
3	(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida. (EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
4	(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.
5	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
6 e 7	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.
8 e 9	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.
10	(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.
11	(EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.
12	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.
13	(EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
14	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.
15	(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.
16 e 17	(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas
18	(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.